وزارة التربية والتعليم
MINISTRY OF EDUCATION
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الثاني

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

الطبعة التجريبية
١٤٣١ هـ - ٢٠١٠ م

قررت وزارة التربية والتعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرياضيات

الصف الأول الثانوي

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للأبحاث والتطوير

التحرير والمراجعة والمواءمة

د. ناصر بن حمد المويشق

محمد بن عبدالله البصيص

د. عبدالله بن محمد الجوعي

صلاح بن عبد الله الزيد

عبدالحكيم عبدالله سليمان

هاني جميل زريقات

التعريب والتحرير اللغوي

نخبة من المتخصصين

إعداد الصور

د. سعود بن عبدالعزيز الفراج

Original Title:

FOR GRADE 10

By:
Cindy J. Boyd
Jerry Cummins
Carol E. Malloy, Ph. D.
John A. Carter, Ph. D.
Alfinio Flores, Ph. D.

Contributing Authors
Viken Hovsepian
Dinah Zike

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Prof. Bob McCollum
Differentiated Instruction
Nancy Frey, Ph. D.
Gifted and talented
Ed Zaccaro
Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry Cummins
Learning Disabilities
Kate Garnett, Ph. D.
Mathematical Fluency
Jason Mutford
Pre-AP
Dixie Ross
Reading and Vocabulary
Douglas Fisher, Ph. D.
Lynn T. Havens

www.obeikaneducation.com

www.glencoe.com

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw Hill Companies. Inc. © 2008.

نادي الطلبة السعوديين في برزبن
SAUDI STUDENTS ASSOCIATION
BRISBANE 2005

www.sscbrisbane.com

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

تم تجهيز هذه المادة بجهود زملائكم في برزبن

أحمد بن بدر الغليق

علي بن بدر الغليق

إشراف

عادل بن علي اليوسف

عبدالعزيز الشهري

2012

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية؛ وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التربية والتعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلًا متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، وحل المشكلات، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطوَّرة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم، وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق.

الفصل 5

الأشكال الرباعية

الفصل 6

التناسب والتشابه

الفصل 7 التحويلات الهندسية

الفصل 8 الدائرة

الفصل
5

الأشكال الرباعية
Quadrilaterals

الأفكار العامة

- أستقصي الزوايا الداخلية والزوايا الخارجية للمضلعات.
- أتعرف خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعيّن والمربع وشبه المنحرف وأطبقها.
- أرسم أشكالًا رباعية في المستوى الإحداثي لأستعملها في البرهان.

المفردات

متوازي الأضلاع (ص 17)
parallelogram

المستطيل (ص 32)
rectangle

المعيّن (ص 40)
rhombus

المربع (ص 41)
square

شبه المنحرف (ص 48)
trapezoid

الربط مع الحياة

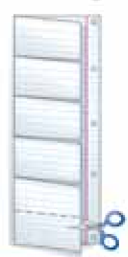
تنس الطاولة: تظهر أشكال مستطيلة على سطح طاولة التنس من تقاطعات الخطوط البيضاء.

المَطْوِيّاتُ
مُنظِّم أفكار

الأشكال الرباعية: اعمل هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك. ابدأ بورقة واحدة من دفتر الملاحظات.

1. **اطوِ** الورقة نصفين طوليًا.

2. **قص** أحد نصفيها إلى 6 أشرطة متصلة عند خط الطيّ.



3. **اكتب** عنوانًا لكل شريط مستعملًا مفاهيم الدروس.

التهيئة للفصـــل 5

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

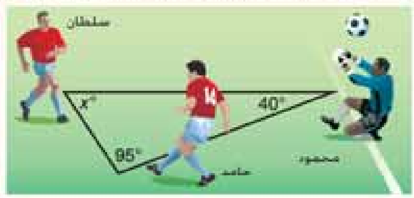
البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي. ارجع إلى «المراجعة السريعة» لمساعدتك في ذلك.

اختبار سريع

1) أوجد قيمة x. (الدرس 3-2)

2) **كرة قدم:** في مباراة كرة قدم، مرر حامد الكرة إلى سلطان الذي سجل هدفًا كما في الشكل أدناه. ما قياس الزاوية المكونة من حامد وسلطان ومحمود؟ (الدرس 3-2)

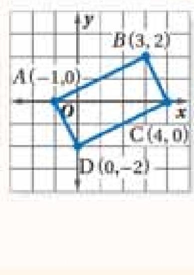


أوجد ميل كل من $\overline{RS}, \overline{TS}$ للنقاط R, T, S المعطاة في السؤالين 3 و 4، وحدد إذا كانت $\overline{RS}, \overline{TS}$ متعامدتين أم لا (درس 3-3)

3) $R(4, 3), S(-1, 10), T(13, 20)$

4) $R(-9, 6), S(3, 8), T(1, 20)$

5) **إطارات:** حدد إذا كانت زوايا الإطار قوائم أم لا. (الدرس 3-3)



مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد قيمة x.

$y + y = 180 - 95$	نظرية مجموع الزوايا
$2y = 180 - 95$	جمع الحدود المتشابهة
$2y = 85$	بطرح 95 من الطرفين
$y = 42.5$	بقسمة الطرفين على 2
$x + y = 180$	نظرية الزوايا المتكاملة
$x + 42.5 = 180$	بالتعويض
$x = 137.5$	بطرح 42.5 من الطرفين

مثال 2

أوجد ميل كل من $\overline{RS}, \overline{TS}$ للنقاط $R(0, 0), S(2, 3),$ $T(-1, 5)$. وحدد إذا كانت $\overline{RS}, \overline{TS}$ متعامدتين أم لا.

أولًا، أوجد ميل $\overline{RS}$.

$$\text{الميل} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{3 - 0}{2 - 0} \quad (x_1, y_1) = (0, 0), (x_2, y_2) = (2, 3)$$

$$= \frac{3}{2} \quad \text{بالتبسيط}$$

ثانيًا، أوجد ميل $\overline{TS}$

لكن $(x_1, y_1) = (-1, 5)$ و $(x_2, y_2) = (2, 3)$.

$$\text{الميل} = \frac{3 - 5}{2 - (-1)} = \frac{-2}{3}$$

بما أن حاصل ضرب الميلين يساوي -1 فإن $\overline{RS} \perp \overline{TS}$

5-1 زوايا المضلعات
Angles of Polygons

الأفكار الرئيسة

- أجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع لأصنفه وأحل مسائل.
- أجد مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع لأصنفه وأحل مسائل.

المفردات:

القطر
Diagonal

استعد

تشبه صدفة المحار المروحي الشكل مضلعًا مكونًا من 12 ضلعًا وله أقطار مرسومة من أحد الرؤوس. و**قطر** المضلع هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين. فمثلًا، $\overline{AB}$ هي أحد أقطار المضلع.

مجموع قياسات الزوايا الداخلية: المضلعات التي عدد أضلاعها أكثر من ثلاثة لها أقطار، والمضلعات التالية تبين جميع الأقطار الممكنة والمرسومة من أحد الرؤوس:

وفي كل حالة، جُزِّئ المضلع إلى مثلثات، ومجموع قياسات زوايا المضلع هو مجموع قياسات زوايا المثلثات. وبما أن مجموع قياسات زوايا المثلث 180 فإنه يمكن عمل جدول لإيجاد مجموع قياسات زوايا عدة مضلعات.

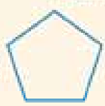
مضلعات محدبة	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا
مثلث	3	1	(1 . 180) - 180
رباعي	4	2	(2 . 180) - 360
خماسي	5	3	(3 . 180) - 540
سداسي	6	4	(4 . 180) - 720
سباعي	7	5	(5 . 180) - 900
ثماني	8	6	(6 . 180) - 1080

ابحث عن نمط في مجموع قياسات الزوايا.

النظرية 5.1 **مجموع قياسات الزوايا الداخلية**

إذا كان عدد أضلاع مضلع محدب n ومجموع قياسات زواياه الداخلية S، فإن $S = 180(n-2)$.

مثال:



$$n = 5$$
$$S = 180\,(n-2)$$
$$= 180\,(5-2) = 540$$

مثال من واقع الحياة — الزوايا الداخلية للمضلع المنتظم

1 **إنشاء:** صنع فيصل صندوق رمل. ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية لهذا الصندوق السداسي المنتظم؟

$S = 180(n-2)$ نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية

$= 180(6-2)$ $n = 6$

$= 180(4) = 720$

أي أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل السداسي المنتظم يساوي 720.

تحقق من فهمك

1) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية للتساعي المنتظم.

مثال — عدد أضلاع المضلع

2 إذا كان قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم 108، فما عدد أضلاعه؟

$S = 180(n-2)$ نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية

$(108)n = 180(n-2)$ $S = 108n$

$108n = 180n - 360$ خاصية التوزيع

$0 = 72n - 360$ بطرح $108n$ من الطرفين

$360 = 72n$ بجمع 360 للطرفين

$5 = n$ بقسمة الطرفين على 72

أي أن للمضلع المنتظم 5 أضلاع.

تحقق من فهمك

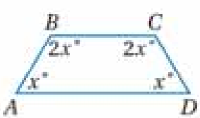
2) إذا كان قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم 135، فما عدد أضلاعه؟

مراجعة المفردات

المضلع المنتظم هو مضلع محدب جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه متطابقة.

مثال — الزوايا الداخلية لمضلع غير منتظم

3 **جبر:** أوجد قياس كل زاوية داخلية في المضلع المجاور.



بما أن $n = 4$، فإن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع يساوي $180(4-2) = 360$.

$360 = m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D$ مجموع قياسات الزوايا الداخلية

$360 = x + 2x + 2x + x$ بالتعويض

$360 = 6x$ تجميع الحدود المتشابهة

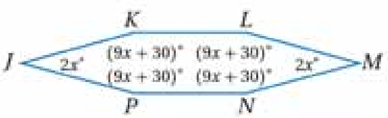
$60 = x$ قسمة الطرفين على 6

استعمل قيمة x لإيجاد قياس كل زاوية.

$m\angle A = 60,\ m\angle B = 2 \times 60 = 120,\ m\angle C = 2 \times 60 = 120,\ m\angle D = 60$.

تحقق من فهمك

3) أوجد قياس كل زاوية داخلية للمضلع المجاور:



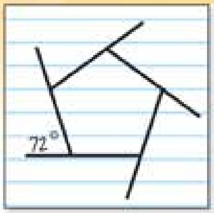
مجموع قياسات الزوايا الخارجية، هل توجد علاقة بين الزوايا الخارجية لمضلع محدب؟

مراجعة المفردات

الزاوية الخارجية هي زاوية مكونة من أحد أضلاع المضلع وامتداد ضلع آخر.

معمل الهندسة

مجموع الزوايا الخارجية للمضلع



اجمع بيانات

- ارسم مثلثًا وارسم مضلعًا محدبًا رباعيًا وخماسيًا وسداسيًا وسباعيًا.
- مد أضلاع كل مضلع لتعمل زاوية خارجية واحدة عند كل رأس.
- استعمل المنقلة لقياس كل زاوية خارجية لكل مضلع وسجله على الرسم.

حلل البيانات

1) انقل الجدول التالي على دفترك وأكمله:

المضلع	المثلث	الرباعي	الخماسي	السداسي	السباعي
عدد الزوايا الخارجية					
مجموع قياسات الزوايا الخارجية					

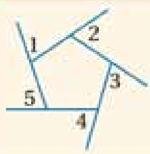
2) ماذا يمكنك أن تستنتج؟

يبين هذا المعمل الهندسي النظرية 5.2 التالية:

النظرية 5.2   **مجموع قياسات الزوايا الخارجية**

إذا كان المضلع محدبًا فإن مجموع قياسات الزوايا الخارجية - زاوية واحدة عند كل رأس - يساوي 360.

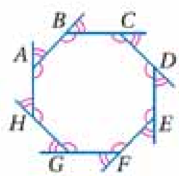
مثال: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 360$



سوف تبرهن هذه النظرية في السؤال 30.

مثال   الزاوية الخارجية

4 أوجد قياسي الزاويتين الخارجية والداخلية للمضلع الثماني المنتظم $ABCDEFGH$.



$8n = 360$ n = قياس كل زاوية خارجية

$n = 45$ بقسمة الطرفين على 8.

أي أن قياس كل زاوية خارجية 45. وبما أن كل زاوية خارجية والزاوية الداخلية المناظرة لها متجاورتان على خط مستقيم، فإن قياس كل زاوية داخلية يساوي $180 - 45 = 135$.

تحقق من فهمك

4) أوجد قياسي الزاويتين الخارجية والداخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 12.

تأكد

مثال 1 (ص 11)

1) **أحواض أسماك:** يمثل المضلع المنتظم المجاور قاعدة حوض أسماك. أوجد مجموع قياسات زواياه الداخلية.

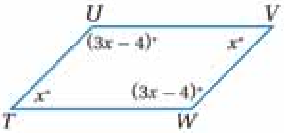
مثال 2 (ص 11)

إذا كان قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم كما هو مبين في السؤالين 2 و 3، فأوجد عدد أضلاع كل مضلع:

2) 60   3) 90

مثال 3 (ص 11)

4) **جبر:** أوجد قياس كل زاوية داخلية للمضلع المجاور.



أوجد قياسي الزاويتين الخارجية والداخلية لكل مضلع منتظم مذكور عدد أضلاعه في السؤالين 5 و 6.

مثال 4 (ص 12)

5) 6   6) 18

تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين

للأسئلة	انظر الأمثلة
7–14	1
15–18	2
19–22	3
23–26	4

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لكل مضلع محدب مما يلي:

7) عدد أضلاعه 32   8) عدد أضلاعه 18

9) عدد أضلاعه 19   10) عدد أضلاعه 27

11) عدد أضلاعه $4y$ 12) عدد أضلاعه $2x$

13) **بستنة:** يصمم عبد الله حديقة لمنزله، ويرغب أن يكون الجزء المخصص للزهور على شكل مضلع ثماني منتظم، أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع الثماني المنتظم.

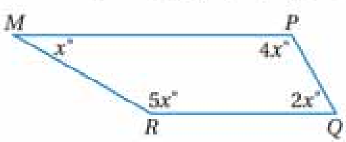
14) **بناء:** تبني شركة مبنى على شكل سداسي منتظم، أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع السداسي المنتظم.

إذا كان قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم كما هو مبين في الأسئلة 18–15، فأوجد عدد أضلاع كل مضلع.

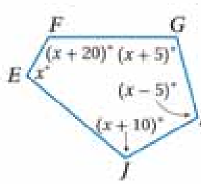
15) 140   16) 170   17) 160   18) 176.4

جبر: أوجد قياس كل زاوية داخلية للمضلعات التالية:

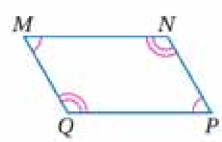
19)



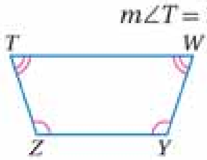
20)



21) $MNPQ$ متوازي أضلاع الذي فيه $m\angle M = 10x,\ m\angle N = 20x$



22) $TWYZ$ شبه منحرف متطابق الضلعين ، فيه $\angle Z \cong \angle Y,\ m\angle Z = 30x,\ \angle T \cong \angle W,$ $m\angle T = 20x$



الربط مع الحياة

تظهر الصورة خلايا نحل ذات أشكال سداسية منتظمة.

أوجد قياس كل زاوية خارجية وقياس كل زاوية داخلية لكل مضلع منتظم مما يلي:

23) العشاري 24) السداسي 25) التساعي 26) الثماني

أوجد قياس كل زاوية داخلية وقياس كل زاوية خارجية لكل مضلع منتظم مذكور عدد أضلاعه في الأسئلة 27–29، ثم قرب الجواب لأقرب عُشر إذا كان ذلك ضروريًا.

27) 11 28) 7 29) 12

30) **برهان:** استعمل الجبر لإثبات نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية.

31) **خلايا نحل:** تبني النحل خلاياها على هيئة سداسيات منتظمة. أوجد قياسات الزوايا الداخلية والخارجية لكل شكل سداسي منتظم.

جبر: أوجد قياس كل زاوية داخلية باستعمال المعلومات المعطاة.

32) مضلع مكون من 10 أضلاع قياسات زواياه الداخلية هي:
$x + 5, x + 10, x + 20, x + 30, x + 35,$
$x + 40, x + 60, x + 70, x + 80, x + 90$

33) المضلع $ABCDE$ المبينة قياسات زواياه الداخلية في الجدول المجاور.

الزاوية	القياس (°)
A	$6x$
B	$4x + 13$
C	$x + 9$
D	$2x - 8$
E	$4x - 1$

مسائل مهارات التفكير العليا

34) **تبرير:** وضح لماذا تطبق نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية، ونظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية على المضلعات المحدبة فقط.

35) **مسألة مفتوحة:** ارسم مضلعًا محدبًا منتظمًا وآخر غير منتظم لهما العدد نفسه من الأضلاع. قارن مجموع قياسات الزوايا الداخلية لكل منهما.

36) **تحد:** يمكن استعمال الصيغتين التاليتين لإيجاد قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم:
$s = \frac{180(n-2)}{n}$, $s = 180 - \frac{360}{n}$ بيّن أن هاتين الصيغتين متكافئتان.

37) **اكتب:** اشرح كيف يرتبط عدد المثلثات التي تجزئ مضلعًا بنظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية.

تدريب على اختبار معياري

38) إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع يساوي مثلي مجموع قياسات زواياه الخارجية، فما نوع هذا المضلع؟

A خماسي **C** ثماني

B سداسي **D** عشاري

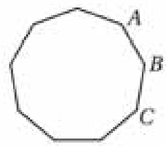
39) إذا كان المضلع المرسوم منتظمًا، فما $m\angle ABC$؟

A $140°$

B $144°$

C $162°$

D $180°$



40) **مراجعة:** إذا كان ناتج طرح x من x^2 يساوي 72، فما إحدى قيمتي x؟

A -36

B -9

C -8

D 72

41) **مراجعة:** قيمة المقدار $\dfrac{3^2 . 4^5 . 5^3}{5^3 . 3^3 . 4^6}$ تساوي:

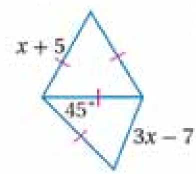
A $\dfrac{1}{60}$ **C** $\dfrac{3}{4}$

B $\dfrac{1}{12}$ **D** 12

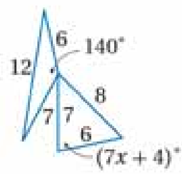
مراجعة تراكمية

اكتب متباينة تصف القيم الممكنة لـ x. (الدرس 5-4)

42)



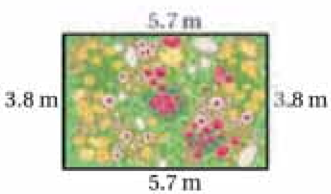
43)



حدد إذا كانت القياسات المبينة في الأسئلة 46-44 يمكن أن تكون أطوال أضلاع لمثلث. اكتب نعم أو لا، وبرر إجابتك. (الدرس 4-4)

44) 5, 17, 9 **45)** 8.4, 7.2, 3.5 **46)** 14.3, 12, 2.2

47) **بستنة:** أحاط مهندس زراعي حوضًا للزهور بشريط بلاستيكي أسود. فإذا كان طول الحوض 5.7 m وعرضه 3.8 m، وكان الشريط البلاستيكي يباع بالقطعة الكاملة وطول القطعة 5 m، فأوجد محيط حوض الزهور، وحدد عدد القطع من الشريط البلاستيكي التي سيشتريها المهندس. (مهارة سابقة)



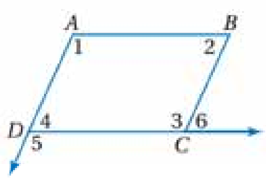
استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: في الشكل المجاور $\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AD} \parallel \overline{BC}$

سمِّ جميع أزواج الزوايا في كل مما يلي: (الدرس 1-2)

48) زاويتان داخليتان متحالفتان.

49) زاويتان داخليتان متبادلتان.



توسع 5-1

معمل الجداول الإلكترونية

زوايا المضلعات

يمكن إيجاد قياس كل زاوية داخلية وقياس كل زاوية خارجية ومجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مضلع منتظم عدد أضلاعه n باستعمال الجداول الإلكترونية.

نشاط

صمم جداولًا إلكترونيًّا متبعًا الخطوات التالية:

- اكتب عناوين للأعمدة كما هو وارد في الجدول الإلكتروني أدناه.
- اكتب الأرقام 10 – 3 في العمود A.
- عدد المثلثات الناتجة عن الأقطار المرسومة من أحد رؤوس المضلع أقل بـ 2 من عدد أضلاعه.
- اكتب صيغة للخلية B2 ليتم طرح 2 من كل عدد في الخلية A2.
- اكتب صيغة للخلية C2 بحيث يحسب الجدول الإلكتروني مجموع قياسات الزوايا الداخلية. تذكر أن الصيغة هي $S = (n - 2)180$.
- استمر في كتابة صيغ لتجد الحسابات المطلوبة. ثم طبق هذه الصيغ حتى سطر 9، ستظهر الصورة النهائية للجدول الإلكتروني كما هو مبين أدناه:

زوايا المضلعات.xls

	A	B	C	D	E	F
1	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلية	قياس كل زاوية داخلية	قياس كل زاوية خارجية	مجموع قياسات الزوايا الخارجية
2	3	1	180	60	120	360
3	4	2	360	90	90	360
4	5	3	540	108	72	360
5	6	4	720	120	60	360
6	7	5	900	128.57	51.43	360
7	8	6	1080	135	45	360
8	9	7	1260	140	40	360
9	10	8	1440	144	36	360
10						

Sheet 1 | Sheet 2 | Sheet 3

حلل النتائج

1) اكتب صيغة لإيجاد قياس كل زاوية داخلية في المضلع.
2) اكتب صيغة لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الخارجية.
3) هل يمكن أن يكون عدد الأضلاع 1 أو 2؟ فسر إجابتك.

استعمل الجدول الإلكتروني في حل الأسئلة 6-4.

4) كم عدد المثلثات في مضلع عدد أضلاعه 15؟
5) أوجد قياس الزاوية الخارجية لمضلع عدد أضلاعه 15؟
6) أوجد قياس الزاوية الداخلية لمضلع عدد أضلاعه 110؟

5-2 متوازي الأضلاع
Parallelogram

الأفكار الرئيسة

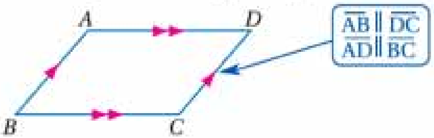
- أتعرف خصائص أضلاع وزوايا متوازي الأضلاع وأطبقها.
- أتعرف خصائص قطري متوازي الأضلاع وأطبقها.

استعد

يستعمل الملاحون مسطرة متوازية الحافتين لتحديد خط سيرهم. فيثبتون إحدى حافتيها عند نقطة الانطلاق، ثم يحركون مسطرة أخرى حتى تصل حافتها إلى قرص البوصلة الموجود على الخريطة. وتحدد قراءة البوصلة الاتجاه الواجب عليهم سلوكه.

كل زوج من الأضلاع المتقابلة في المسطرة متوازٍ.

أضلاع وزوايا متوازي الأضلاع: **متوازي الأضلاع** هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان.



$\square ABCD$

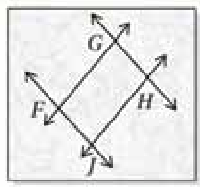
يساعدك معمل الهندسة أدناه على التوصل إلى استنتاجات حول أضلاع وزوايا متوازي الأضلاع.

معمل الهندسة

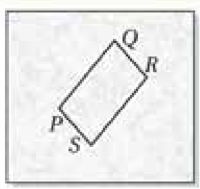
خصائص متوازي الأضلاع

اعمل نموذجًا

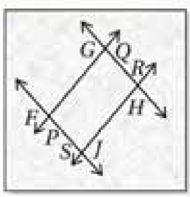
الخطوة 1: ارسم زوجين من المستقيمات المتوازية والمتقاطعة على الورقة. سمِّ الرؤوس F و G و H و J.



الخطوة 2: انسخ $FGHJ$ وسمِّ متوازي الأضلاع الجديد $PQRS$ بحيث تكون $\angle F \cong \angle P$.



الخطوة 3: دوِّر $PQRS$ على $FGHJ$ لمقارنة الأضلاع والزوايا.

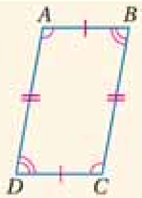
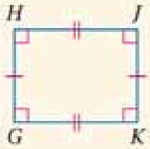


حلل

1) اكتب كافة القطع المستقيمة المتطابقة.
2) اكتب كافة الزوايا المتطابقة.
3) توصل إلى استنتاج حول علاقات الزوايا.
4) اختبر استنتاجك.

يقود هذا المعمل الهندسي إلى أربع خصائص لمتوازي الأضلاع:

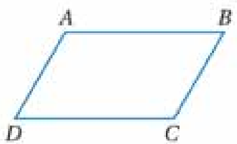
النظريات

		أمثلة
5.3 الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة.	$\overline{AB} \cong \overline{DC}$ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	
5.4 الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.	$\angle A \cong \angle C$ $\angle B \cong \angle D$	
5.5 الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة.	$m\angle A + m\angle B = 180$ $m\angle B + m\angle C = 180$ $m\angle C + m\angle D = 180$ $m\angle D + m\angle A = 180$	
5.6 إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة فإن زواياه الأربع قوائم.	$m\angle G = 90$ $m\angle H = 90$ $m\angle J = 90$ $m\angle K = 90$	

ستبرهن النظريتين 5.3 و 5.5 في السؤالين 34 و 35

مثال — برهان نظرية 5.4

1 اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 5.4.



المعطيات: $\square ABCD$

المطلوب إثبات أن: $\angle A \cong \angle C, \angle D \cong \angle B$

البرهان:

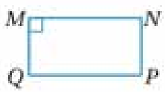
العبارات	المبررات
1) $\square ABCD$	1) معطى
2) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AD} \parallel \overline{BC}$	2) تعريف متوازي الأضلاع
3) $\angle A$ و $\angle D$ متكاملتان. $\angle D$ و $\angle C$ متكاملتان. $\angle B$ و $\angle C$ متكاملتان.	3) إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن الزوايا الداخلية المتحالفة متكاملة.
4) $\angle A \cong \angle C$ $\angle D \cong \angle B$	4) مكملتي الزاوية الواحدة متطابقتين.

إرشادات

رسم الأشكال

تصاغ النظريات بمصطلحات عامة. ويتضمن البرهان رسومًا للأشكال تمكنك من الرجوع إلى القطع المستقيمة والزوايا المحددة.

تحقق من فهمك



1) برهان: اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 5.6.

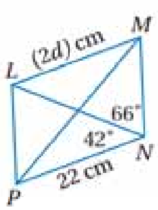
المعطيات: $\square MNPQ$ متوازي أضلاع

$\angle M$ زاوية قائمة.

المطلوب: إثبات أن $\angle N, \angle P, \angle Q$ زوايا قوائم.

مثال من واقع الحياة — خصائص متوازي الأضلاع

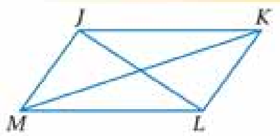
2 **شعار:** الشكل الرباعي **$LMNP$** متوازي أضلاع، صمم كجزء من شعار جديد لشركة. أوجد **$m\angle LMN, m\angle PLM$**، قيمة **d**.



$m\angle MNP = 66 + 42 = 108$	نظرية جمع الزوايا
$\angle PLM \cong \angle MNP$	الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.
$m\angle PLM = m\angle MNP$	تعريف الزوايا المتطابقة
$m\angle PLM = 108$	بالتعويض
$m\angle PLM + m\angle LMN = 180$	الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة
$108 + m\angle LMN = 180$	بالتعويض
$m\angle LMN = 72$	بطرح 108 من الطرفين.
$\overline{LM} \cong \overline{PN}$	الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.
$LM = PN$	تعريف القطع المستقيمة المتطابقة
$2d = 22$	بالتعويض.
$d = 11$	بقسمة الطرفين على 2.

تحقق من فهمك

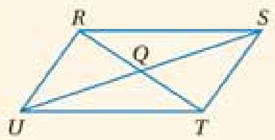
2) ارجع إلى $\square LMNP$. إذا كان محيط متوازي الأضلاع 74 cm وحدة، فأوجد MN.



قطرا متوازي الأضلاع، $\overline{JL}$ و $\overline{KM}$ قطران في متوازي الأضلاع $JKLM$. النظرية 5.7 التالية تحدد العلاقة بين قطري متوازي الأضلاع.

النظرية 5.7

قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.



مثال، $\overline{RQ} \cong \overline{QT}$ ، $\overline{SQ} \cong \overline{QU}$

ستبرهن النظرية 5.7 في سؤال 36

مثال على اختبار معياري

قطرا متوازي الأضلاع

3 ما إحداثيات نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه هي $A(2, 5), B(6, 6), C(4, 0), D(0, -1)$؟

A $(4, 2)$ **B** $(4.5, 2)$ **C** $\left(\frac{7}{6}, -\frac{5}{2}\right)$ **D** $(3, 2.5)$

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$

حل فقرة الاختبار

أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$.

$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{5+0}{2}\right)$	قانون نقطة المنتصف
$= (3, 2.5)$	بالتبسيط

إرشادات الاختبار

التحقق من صحة الإجابات

تحقق من صحة إجابتك دائمًا. وللتحقق من صحة إجابة هذا السؤال أوجد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{BD}$.

أي أن إحداثيات نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ هي $(3, 2.5)$.
فالجواب هو البديل **D**.

تحقق من فهمك

3) **هندسة إحداثية:** ما إحداثيات نقطة تقاطع قطري $\square RSTU$ الذي إحداثيات رؤوسه هي $R(-8, -2), S(-6, 7), T(6, 7), U(4, -2)$ ؟

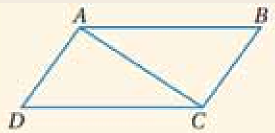
A $(-1, 2.5)$ **B** $(1, -4)$ **C** $(5, 4.5)$ **D** $(-1.5, -2.5)$

وتصف النظرية 8-5 خاصية أخرى لقطري متوازي الأضلاع.

النظرية 5.8

كلا قطري متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

مثال: $\triangle ACD \cong \triangle CAB$



ستبرهن النظرية 5.8 في سؤال 37

تأكد

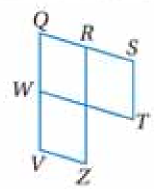
مثال 1 (ص 18)

برهان: اكتب برهانًا من النوع المذكور.

1) برهان ذو عمودين

المعطيات: $\square WQST$ و $\square VZRQ$

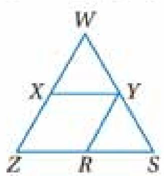
المطلوب: إثبات أن $\angle Z \cong \angle T$



2) برهان حر

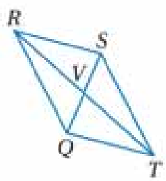
المعطيات: $\square XYRZ, \overline{WZ} \cong \overline{WS}$

المطلوب: إثبات أن $\angle XYR \cong \angle S$



مثال 2 (ص 18)

أكمل كلًّا مما يأتي حول $\square QRST$. وبرر إجابتك.

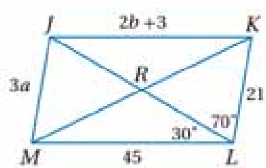


3) $\overline{SV} \cong$ __?__

4) $\triangle VRS \cong$ __?__

5) $\angle TSR$ تكمل __?__.

استعمل $\square JKLM$ لإيجاد كل قياس أو قيمة كل رمز.



6) $m\angle MJK$

7) $m\angle JML$

8) $m\angle JKL$

9) $m\angle KJL$

10) a

11) b

12) **تدريب على اختبار معياري:** إحداثيات بعض رؤوس متوازي الأضلاع $GHJK$ هي $G(-3, 4), H(1, 1), J(3, -5)$. فما إحداثيات الرأس K؟

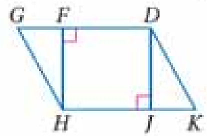
A $(-1, 1)$ **B** $(-2, 0)$ **C** $(-1, -2)$ **D** $(-2, -1)$

تمارين ومسائل

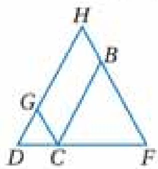
إرشادات للتمارين	انظر الأمثلة
للأسئلة	
13, 14	1
34-37	
15-30	2
31-33	3

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين

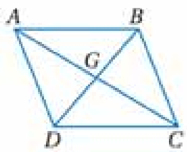
13) **المعطيات:** $\square DGHK, \overline{FH} \perp \overline{GD}, \overline{DJ} \perp \overline{HK}$
المطلوب: إثبات أن $\triangle DJK \cong \triangle HFG$



14) **المعطيات:** $\square BCGH, \overline{HD} \cong \overline{FD}$
المطلوب: إثبات أن $\angle F \cong \angle GCB$

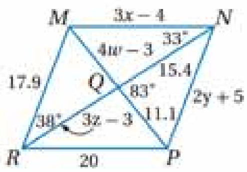


أكمل كلًّا مما يأتي حول $\square ABCD$. وبرر إجابتك.



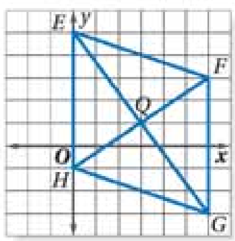
15) $\angle DAB \cong \underline{\ ?\ }$
16) $\angle ABD \cong \underline{\ ?\ }$
17) $\overline{AB} \parallel \underline{\ ?\ }$
18) $\overline{BG} \cong \underline{\ ?\ }$
19) $\triangle ABD \cong \underline{\ ?\ }$
20) $\angle ACD \cong \underline{\ ?\ }$

جبر: استعمل $\square MNPR$ لإيجاد كل قياس أو قيمة كل رمز مما يلي. قرب الجواب إلى أقرب عُشر إن كان ضروريًّا:



21) $m\angle MNP$
22) $m\angle NRP$
23) $m\angle RNP$
24) $m\angle RMN$
25) $m\angle MQN$
26) $m\angle MQR$
27) x
28) y
29) w
30) z

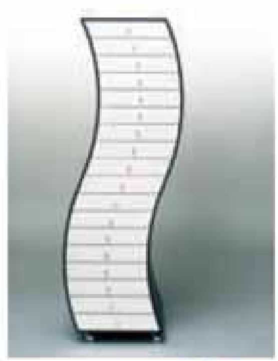
هندسة إحداثية: للأسئلة 31-33 ارجع إلى $\square EFGH$.



31) استعمل قانون المسافة للتحقق من أن القطرين ينصف كل منهما الآخر.
32) حدد إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين أم لا.
33) أوجد ميل كل من $\overline{EH}$ و $\overline{EF}$. هل الأضلاع المتجاورة متعامدة؟ برر إجابتك.

اكتب برهانًا من النوع المذكور.

34) برهان ذو عمودين للنظرية 5.3
35) برهان ذو عمودين للنظرية 5.5
36) برهان حر للنظرية 5.7
37) برهان ذو عمودين للنظرية 5.8



الربط مع الحياة
نجح مصمِّمو الأثاث في تصميم أثاث عمليّ وجميل وواقعي ومعتدل.

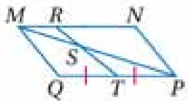
38) **تصميم:** صف خصائص متوازي الأضلاع التي يمكن أن يكون قد استعملها مصمم الخزنة في الشكل المجاور ليضع مقبض الأدراج.

39) **جبر:** في متوازي الأضلاع $ABCD$ يتقاطع القطران $\overline{AC}, \overline{BD}$ عند النقطة P. إذا كان $AP = 3a + 18, AC = 12a, PB = a + 2b, PD = 3b + 1$ فأوجد قيمة كل من a, b، وطول القطر $\overline{BD}$.

مسائل مهارات التفكير العليا

40) **جبر:** $ABCD$ متوازي أضلاع فيه: $AB = 2x + 5, m\angle BAC = 2y, m\angle B = 120$
$m\angle CAD = 21, CD = 21$ أوجد قيمة x و y

41) **مسألة مفتوحة:** ارسم متوازي الأضلاع بحيث يكون طول أحد أضلاعه مثلي طول الضلع المجاور.



42) **تحد:** قارن بين الزوايا المتناظرة في المثلثين $\triangle MSR$ و $\triangle PST$ إذا علمت أن الشكل $MNPQ$ متوازي أضلاع فيه $MR = \frac{1}{4} MN$. ماذا يمكنك أن تستنتج حول هذين المثلثين؟

43) **اكتب:** صف خصائص أضلاع متوازي الأضلاع وقطريه.

تدريب على اختبار معياري

44) قياس زاويتين متحالفتين في متوازي أضلاع هو $(3x + 42)^\circ$ و $(9x - 18)^\circ$. فما قياس كل زاوية؟

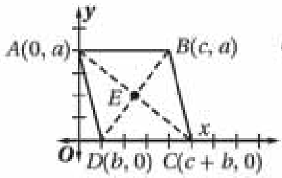
A $13, 167$

B $58.5, 31.5$

C $39, 141$

D $81, 99$

45) الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع. ما إحداثيات النقطة E؟



A $\left(\frac{a}{c}, \frac{c}{2}\right)$

B $\left(\frac{c+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$

C $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2}\right)$

D $\left(\frac{c+b}{2}, \frac{a}{2}\right)$

مراجعة تراكمية

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لكل مضلع محدب مما يلي: (الدرس 5-1)

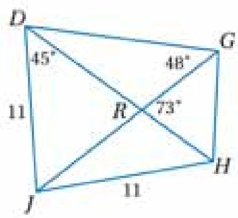
46) عدد أضلاعه 14

47) عدد أضلاعه 22

48) عدد أضلاعه 17

49) عدد أضلاعه 36

اكتب متباينة تربط بين قياسي كل زوج من الزوايا أو طولي كل زوج من القطع المستقيمة فيما يلي: (الدرس 5 - 5)



50) $m\angle DRJ, m\angle HRJ$

51) DG, GH

52) $m\angle JDH, m\angle DHJ$

53) **أعمال:** يعمل خالد في محل لبيع الهدايا بعد دوامه المدرسي. ويتقاضى 10 ريالات عن كل ساعة عمل بالإضافة إلى 15% من قيمة الهدايا التي يبيعها. اكتب معادلة تمثل دخله في أسبوع إذا بلغت قيمة مبيعاته 550 ريالًا. (الدرس 1 - 5)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: إحداثيات رؤوس شكل رباعي هي $A(-5, -2), B(-2, 5), C(2, -2), D(-1, -9)$. حدد إذا كانت كل قطعة مستقيمة مما يلي ضلعًا أم قطرًا للشكل الرباعي، وأوجد ميل كل قطعة. (الدرس 3 - 2)

54) $\overline{AB}$

55) $\overline{BD}$

56) $\overline{CD}$

اقرأ

التسلسل الهرمي للمضلعات

التسلسل الهرمي هو تصنيف لمجموعة من الأشياء. ومن ومن الأمثلة عليه ترتيب المضلعات: المستطيل، المعيّن، شبه المنحرف، متوازي الأضلاع، المربع، الشكل الرباعي، شكل الطائرة الورقية. في تسلسل هرمي كما هو موضح.

وسوف تدرس المستطيل والمربع والمعيّن وشبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية في الدروس الآتية من الفصل 5.

استعمل المعلومات أدناه لتساعدك على قراءة التسلسل الهرمي:

- يكتب المفهوم الأوسع في رأس الهرم متبوعًا بالمفاهيم الأخرى في ترتيب. فمثلًا، المضلع هو أوسع مفهوم في التسلسل الهرمي، والمربع مفهوم محدد جدًا.
- كل مفهوم متضمن في المستوى الأعلى المرتبط به. فمثلًا، جميع المربعات هي: معيّنات، ومستطيلات، ومتوازيات أضلاع، وأشكال رباعية، ومضلعات. ومن ناحية أخرى شبه المنحرف متطابق الضلعين ليس مربعًا أو شكل طائرة ورقية.
- بعض – وليس كل – مفاهيم كل مستوى متضمنة في المستوى الأدنى في التسلسل الهرمي، فمثلًا قد يكون شبه المنحرف متطابق الضلعين، أو يكون المستطيل مربعًا.

اقرأ لتتعلم

اعتمد على التسلسل الهرمي المجاور، واكتب أمام كل عبارة "صحيحة أو "خاطئة"، أو المعلومات غير كافية":

1) كل المفصليات عناكب.

2) بعض الحشرات ديدان مفلطحة.

3) جميع الديدان الشريطية مفلطحة.

4) بعض المفصليات حشرات.

5) كل العناكب لا فقاريات.

6) ارسم تسلسلًا هرميًّا يبين العلاقة بين المثلثات متطابقة الأضلاع، والمضلعات، والمثلثات متطابقة الضلعين، والمثلثات، والمثلثات مختلفة الأضلاع.

استكشاف
5-3

معمل الحاسبة البيانية

متوازي الأضلاع

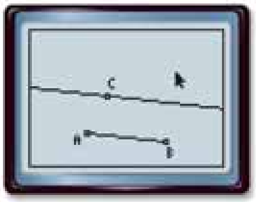
يمكنك استعمال آلة حاسبة بيانية أو برمجية رسم هندسي مناسبة لاكتشاف خصائص متوازي الأضلاع.

نشاط

رسم شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان ومتطابقان.

الخطوة الأولى: ارسم قطعة مستقيمة وسمّها $\overline{AB}$ لتكون أحد أضلاع الشكل الرباعي

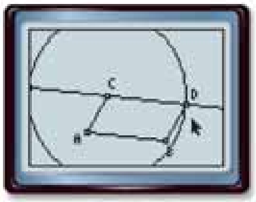
الخطوة الثانية: ارسم مستقيمًا موازيًا للقطعة المستقيمة. سيظهر مستقيم عليه نقطة سمِّها C.



الخطوة الأولى و الثانية

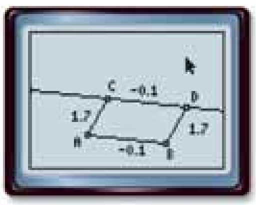
الخطوة الثالثة: افتح الفرجار بقدر طول $\overline{AB}$ باختيار أحد طرفي القطعة ثم الطرف الآخر وارسم دائرة مركزها C.

الخطوة الرابعة: ارسم نقطة عند تقاطع المستقيم والدائرة، وسمها D ثم كرر الخطوة الأولى لرسم $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$.



الخطوة الثالثة و الرابعة

الخطوة الخامسة: اخف الدائرة ثم أوجد ميل كل من $\overline{AB}, \overline{BD}, \overline{CD}, \overline{AC}$.



الخطوة الخامسة

حلل النتائج

1) ما العلاقة بين الضلعين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ ؟ اشرح كيف عرفت ذلك.

2) ما العلاقة بين ميلي كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي $ABDC$؟ وما نوع هذا الشكل؟ فسر إجابتك.

3) انقر على النقطة A واسحبها لتغير هيئة الشكل $ABDC$. ماذا تلاحظ؟

4) **كوّن استنتاجًا** حول الشكل الرباعي الذي فيه ضلعان متقابلان متوازيان متطابقان.

5) استعمل الآلة الحاسبة البيانية لرسم شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متطابقان. ثم أوجد ميل كل ضلع من أضلاعه. كوّن استنتاجًا قائمًا على ملاحظاتك.

5-3 تمييز متوازي الأضلاع
Tests for Parallelograms

الأفكار الرئيسة

- أتعرف الشروط الكافية ليكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.
- أثبت أن مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي تشكل متوازي أضلاع.

استعد

تبدو واجهة القرميد في هذا المبنى وكأنها متوازي أضلاع، والأضلاع المتقابلة فيها تظهر متساوية في الطول.

كيف يمكنك التأكد من أن الشكل المحدد باللون الأحمر متوازي أضلاع فعلًا؟

الشروط الكافية لمتوازي الأضلاع: من تعريف متوازي الأضلاع تكون الأضلاع المتقابلة متوازية. لذلك، إذا كان كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي متوازيين فإنه متوازي أضلاع. ويمكن استعمال طرق أخرى لتحديد إذا كان شكل رباعي متوازي أضلاع أم لا.

معمل الهندسة

تمييز متوازي الأضلاع

نموذج

- احضر أربع ماصّات بحيث يكون كل اثنتين منها متساويتين في الطول.
- صِلْها بإدخال سلك رفيع مرن فيها لتكون شكلًا رباعيًا، كما في الشكل المجاور.
- بدِّل الماصّات لتكون شكلًا رباعيًا آخر.

حلل

1) قس المسافة بين كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي في ثلاثة مواقع مختلفة على الأقل، وكرر هذه العملية لعدة أشكال. ماذا يمكنك أن تستنتج حول الأضلاع المتقابلة في كل شكل؟
2) صنف الأشكال الرباعية التي كونتها.
3) قارن طولي كل ضلعين متقابلين.
4) أوجد قياسات الزوايا الأربع في كل الأشكال الرباعية التي كونتها. ما العلاقات التي وجدتها؟

استنتج

5) ما الشروط الضرورية للتأكد من أن شكلًا رباعيًا هو متوازي أضلاع؟

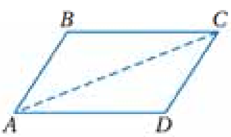
النظريات متى يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع؟

		مثال
5.9	إذا كان كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي متطابقين فإنه متوازي أضلاع.	
5.10	إذا كانت كل زاويتين متقابلتين في شكل رباعي متطابقتين فإنه متوازي أضلاع.	
5.11	إذا نصف قطرا شكل رباعي كل منهما الآخر فإنه متوازي أضلاع.	
5.12	إذا كان ضلعان متقابلان في شكل رباعي متوازيين ومتطابقين فإنه متوازي أضلاع.	

سوف تبرهن النظريتان 5.9, 5.11 في السؤالين 17, 18 على الترتيب

مثال اكتب برهانًا

1 **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 5.10.



المعطيات: $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D$

المطلوب: إثبات أن $ABCD$ متوازي أضلاع.

البرهان:

بما أن كل نقطتين تحددان مستقيمًا فيمكننا رسم $\overline{AC}$. لدينا الآن مثلثان. وتعلم أن مجموع قياسات زوايا المثلث 180 لذلك فإن مجموع قياسات زوايا المثلثين 360. إذن $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360$.

بما أن $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D, m\angle A = m\angle C, m\angle B = m\angle D$. فبالتعويض نجد أن $m\angle A + m\angle A + m\angle B + m\angle B = 360$ أي أن $2(m\angle A) + 2(m\angle B) = 360$. وبقسمة طرفي المعادلة السابقة على 2 ينتج أن $m\angle A + m\angle B = 180$. وهذا يعني أنهما زاويتان متحالفتان متكاملتان. إذن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

وبالمثل $2m\angle A + 2m\angle D = 360$ أو $m\angle A + m\angle D = 180$. وهاتان زاويتان متحالفتان ومتكاملتان تحتمان أن $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$. إذن كل ضلعين متقابلين متوازيان. فالشكل $ABCD$ متوازي أضلاع.

تحقق من فهمك

1) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 5.12

مثال من واقع الحياة خصائص متوازي الأضلاع

2 **فن:** تبدو بعض الأجزاء في الرسم أدناه وكأنها متوازي أضلاع، اذكر المعلومات اللازمة لتحديد إذا كانت هذه الأجزاء متوازي أضلاع أم لا.

يكون الجزء متوازي أضلاع إذا كان كل ضلعين متقابلين متطابقين، أو إذا كان هناك ضلعان متقابلان متطابقين ومتوازيين، أو إذا كان القطران ينصف كل منهما الآخر، أو إذا كانت كل زاويتين متقابلتين متطابقتين.

تحقق من فهمك

2) **فن:** لدى فاطمة عدة قطع من السيراميك تخطط لاستعمالها في عمل لوحة فسيفساء. كيف يمكنها التأكد من أن القطع ذات الأشكال الرباعية منها على شكل متوازي أضلاع؟

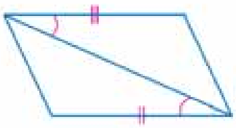
مثال خصائص متوازي الأضلاع

3 **حدد كان الشكل الرباعي إلى اليسار متوازي أضلاع. برر إجابتك.**

كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس، فهما متطابقتان.

وإذا كانت كل زاويتين متقابلتين متطابقتين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

تحقق من فهمك



3) حدد إذا كان الشكل الرباعي المرسوم متوازي أضلاع أم لا.

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا حقق أحد الشروط التالية:

ملخص المفاهيم تمييز متوازي الأضلاع

1) كل ضلعين متقابلين متوازيان. (التعريف)
2) كل ضلعين متقابلين متطابقان. (النظرية 5.9)
3) كل زاويتين متقابلتين متطابقتان. (النظرية 5.10)
4) القطران ينصف كل منهما الآخر. (النظرية 5.11)
5) فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان. (النظرية 5.12)

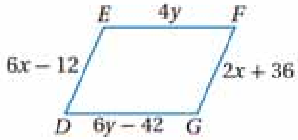
إرشـادات

أخطاء شائعة

لإثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع يكفي أن يتحقق شرط واحد من الشروط الخمس (النظريات الأربع ، التعريف).

مثـال

إيجاد القياسات



4 **جبر:** أوجد قيمة كل من x و y بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

بما أن الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة فإن.

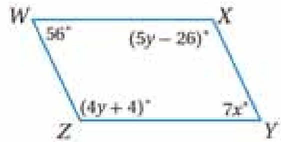
$\overline{EF} \cong \overline{DG}$	ضلعان متقابلان	$\overline{DE} \cong \overline{FG}$	ضلعان متقابلان
$EF = DG$	تعريف القطع المتطابقة	$DE = FG$	تعريف القطع المتطابقة
$4y = 6y - 42$	بالتعويض	$6x - 12 = 2x + 36$	بالتعويض
$-2y = -42$	طرح $6y$ من الطرفين.	$4x = 48$	طرح $2x$ وإضافة 12 إلى الطرفين .
$y = 21$	قسمة الطرفين على −2.	$x = 12$	قسمة الطرفين على 4.

وعليه فإنه عندما $x = 12$ و $y = 21$، فإن الشكل $DEFG$ يكون متوازي أضلاع.

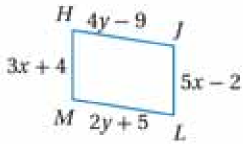
تحقق من فهمك

أوجد قيمة كل من x و y في السؤالين التاليين بحيث يكون كل شكل رباعي فيهما متوازي أضلاع:

(4A



(4B



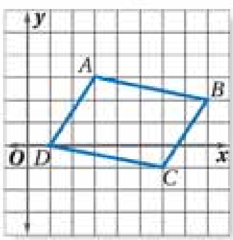
متوازي الأضلاع والمستوى الإحداثي: يمكننا استعمال قانوني المسافة والميل لتحديد إذا كان شكل رباعي في المستوى الإحداثي متوازي أضلاع أم لا.

مثـال

استعمال الميل والمسافة

5 **هندسة إحداثية:** حدد إذا كان الشكل الذي إحداثيات رؤوسه $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$ متوازي أضلاع أم لا. استعمل قانون الميل.

إذا كانت الأضلاع المتقابلة لشكل رباعي متوازية فإنه متوازي أضلاع.



ميل $\overline{AB} = \frac{2-3}{8-3} = \frac{-1}{5}$

ميل $\overline{DC} = \frac{-1-0}{6-1} = \frac{-1}{5}$

ميل $\overline{AD} = \frac{3-0}{3-1} = \frac{3}{2}$

ميل $\overline{BC} = \frac{-1-2}{6-8} = \frac{3}{2}$

بما أن كل ضلعين متقابلين لهما الميل نفسه، فإن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AD} \parallel \overline{BC}$.
لذلك فالشكل $ABCD$ متوازي أضلاع حسب التعريف.

إرشـادات

هندسة إحداثية

يمكن استعمال قانون نقطة المنتصف لتحديد إذا كان شكل رباعي هو متوازي أضلاع حسب النظرية 5.11.

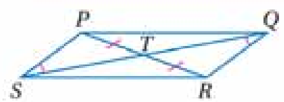
تحقق من فهمك

5) حدد إذا كان الشكل الذي إحداثيات رؤوسه $F(-2, 4), G(4, 2), H(4, -2), J(-2, -1)$ متوازي أضلاع أم لا. استعمل قانون نقطة المنتصف

تأكد

مثال 1 (ص 26)

1) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن الشكل $PQRS$ متوازي أضلاع إذا علم أن $\overline{PT} \cong \overline{TR}$ و $\angle TSP \cong \angle TQR$.



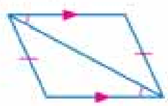
مثال 2 (ص 27)

2) **فن:** صمم خالد لوحة فنية مكوّنة من ثلاثة أجزاء. اذكر طريقة لتحديد إذا كانت الأجزاء على شكل متوازي أضلاع أم لا.

مثال 3 (ص 27)

حدد إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا. برر إجابتك.

3)

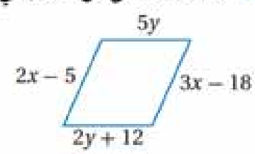


4)

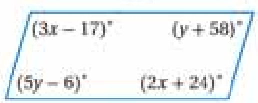
مثال 4 (ص 28)

جبر: أوجد قيمة كل من x و y كي يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

5)



6)



مثال 5 (ص 28)

هندسة إحداثية: حدد إذا كان الشكل المعطى إحداثيات رؤوسه في السؤالين 7 و 8 متوازي أضلاع أم لا. استعمل الطريقة المشار إليها.

7) $B(0, 0), C(4, 1), D(6, 5), E(2, 4)$ قانون الميل

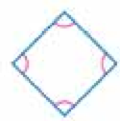
8) $E(-4, -3), F(4, -1), G(2, 3), H(-6, 2)$ قانون نقطة المنتصف

تمارين ومسائل

إرشادات للأسئلة	للتمارين انظر الأمثلة
9-14	3
15-17	2
18 , 19	1
20-25	4
26-28	5

حدد إذا كان كل شكل رباعي متوازي أضلاع أم لا. برر إجابتك.

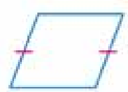
9)



10)

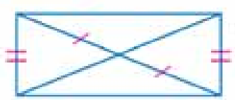
11)

12)

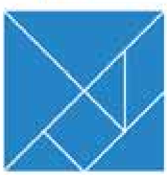


13)

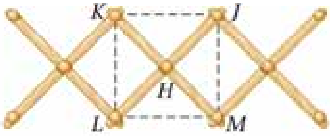
14)



15) **أشكال هندسية:** يتكون الشكل المجاور من سبع قطع: مربع صغير، مثلثان صغيران قائما الزاوية ومتطابقان، مثلثان كبيران قائما الزاوية ومتطابقان، مثلث متوسط قائم الزاوية، وشكل رباعي. كيف يمكن تحديد نوع الشكل الرباعي.



16) **أثاث:** اشترى حازم علاقة ملابس قابلة للطي فيها 11 مفصلًا كما يظهر في الشكل المجاور، فإذا كانت النقطة H منتصف كل من $\overline{KM}$ و $\overline{JL}$، فما نوع الشكل $JKLM$؟ وضح إجابتك.

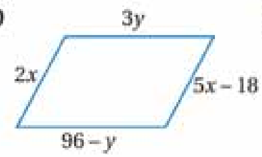


برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل نظرية مما يلي:

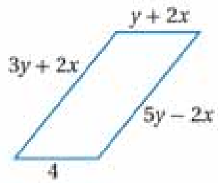
17) النظرية 5.9

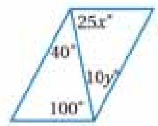
18) النظرية 5.11

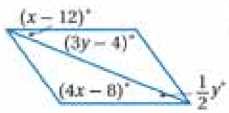
جبر: أوجد قيمة كل من x و y ليكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

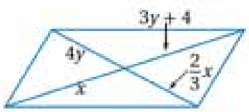
19)


20)


21)


22)


23)


24)


هندسة إحداثية: حدد إذا كان الشكل الذي إحداثيات رؤوسه معطاة في كل من الأسئلة 25-27 متوازي أضلاع. استعمل الطريقة المشار إليها.

25) $B(-6, -3), C(2, -3), E(4, 4), G(-4, 4)$ قانون نقطة المنتصف.

26) $H(5, 6), J(9, 0), K(8, -5), L(3, -2)$ قانون المسافة

27) $C(-7, 3), D(-3, 2), F(0, -4), G(-4, -3)$ قانوني المسافة والميل

28) رؤوس الشكل الرباعي $QSTW$ هي $Q(-3, 3), S(4, 1), T(-1, -2), W(-5, -1)$.
حدد كيف تحرك أحد الرؤوس ليصبح الشكل $QSTW$ متوازي أضلاع.

هندسة إحداثية: إذا كانت ثلاثة رؤوس لمتوازي أضلاع كما هو مبين في السؤالين 29 وَ 30، فأوجد الإحداثيات الممكنة للرأس الرابع.

29) $A(1, 4), B(7, 5), C(4, -1)$

30) $Q(-2, 2), R(1, 1), S(-1, -1)$

مسائل مهارات التفكير العليا

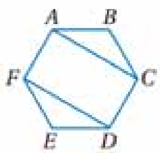
31) **تبرير:** ادعت شيماء اكتشافها نظرية جديدة في الهندسة، مفادها أن: قطر متوازي الأضلاع ينصف زاويتي متوازي الأضلاع عند طرفي القطر. حدد إذا كانت هذه النظرية صحيحة أم لا. أعطِ مثالًا للتأكيد أو مثالًا مضادًا.

32) **مسألة مفتوحة:** ارسم متوازي أضلاع. سمِّ الزوايا المتطابقة. اشرح كيف حددت أنه متوازي أضلاع.

33) **اكتشف الخطأ:** فيما يلي يصف كل من أحمد وخالد طريقة لبيان أن شكلًا رباعيًا هو متوازي أضلاع. من منهما طريقته صحيحة؟ وضح إجابتك.

أحمد	خالد
يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان ضلعان متقابلان متطابقين والضلعان الآخران متوازيين.	يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين.

34) **تحد:** اكتب برهانًا لإثبات أن الشكل $FDCA$ متوازي أضلاع حيث الشكل $ABCDEF$ سداسي منتظم.



35) **اكتب:** اذكر متى يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع؟

تدريب على اختبار معياري

36) إذا كان الضلعان $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ للشكل الرباعي $ABCD$ متوازيين. فما هي المعلومة الإضافية والكافية لإثبات أن الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع؟

A $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

B $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

C $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

D $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

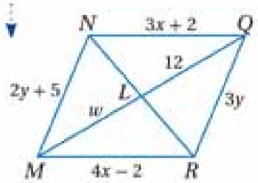
37) **مراجعة:** قاد خالد سيارته لمدة 5 ساعات وكان معدل سرعته 58 mi\h. فإذا كانت سرعته خلال الساعات الثلاث الأولى 50 mi\h، فكم كانت سرعته في الساعتين الأخيرتين بالأميال في الساعة؟

A 70   **C** 66

B 60   **D** 54

مراجعة تراكمية

استعمل $\square NQRM$ المجاور لإيجاد قياس أو قيمة كل رمز. (الدرس 2-5)



38) w 39) x

40) NQ 41) QR

إذا كان قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم كما هو مبين في الأسئلة 46–43 فأوجد عدد أضلاع كل مضلع: (الدرس 1-5)

42) 135   43) 144   44) 168   45) 162

46) **رياضة:** ذهب وائل إلى النادي الرياضي لأكثر من ساعتين بقليل، فسبح في بركة السباحة دورة كاملة ثم تدرب على رفع الأثقال. أثبت أنه قام بواحد من النشاطين لمدة تزيد عن الساعة. (الدرس 3-4)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: استعمل الميل لتحديد إذا كانت $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ متعامدتين أم لا. (الدرس 3-2)

47) $A(2, 5), B(6, 3), C(8, 7)$ 48) $A(-1, 2), B(0, 7), C(4, 1)$

5-4 المستطيل
Rectangle

الأفكار الرئيسة

- أتعرف خصائص المستطيل وأطبقها.
- أحدد إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا أم لا.

المفردات:

المستطيل
rectangle

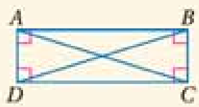
استعد

كثير من الألعاب الرياضية تمارَس على مضمار مخطط بخطوط متوازية. فملعب كرة التنس الأرضي يحوي خطوطًا متوازية تخدم كل لاعب. وتقسم الخطوط المتوازية الملعب للمباريات الفردية والزوجية. وساحة اللعب محددة بخطوط متعامدة.

خصائص المستطيل: **المستطيل** شكل رباعي زواياه الأربع قوائم. ولأن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان فإنه حالة خاصة من متوازي الأضلاع. لذلك، فللمستطيل جميع خصائص متوازي الأضلاع، بالإضافة إلى أن قطريه متطابقان.

النظرية 5.13

إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا فإن قطريه متطابقان.



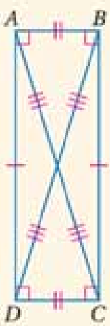
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

سوف تبرهن النظرية 5.13 في السؤال 32

إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا فإن الخصائص التالية صحيحة:

مفاهيم أساسية — المستطيل

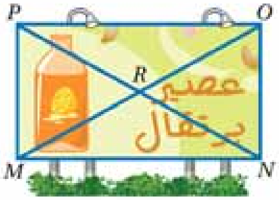
المستطيل شكل رباعي زواياه الأربع قوائم.



الخصائص	أمثلة
1) الأضلاع المتقابلة متطابقة ومتوازية.	$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
2) الزوايا المتقابلة متطابقة.	$\angle A \cong \angle C$ $\angle B \cong \angle D$
3) الزوايا المتحالفة متكاملة.	$m\angle A + m\angle B = 180$ $m\angle B + m\angle C = 180$ $m\angle C + m\angle D = 180$ $m\angle D + m\angle A = 180$
4) القطران متطابقان وينصف كل منهما الآخر.	$\overline{AC} \cong \overline{BD}$ وينصف كل منهما الآخر
5) جميع الزوايا الأربع قوائم.	$m\angle DAB = m\angle BCD =$ $m\angle ABC = m\angle ADC = 90$

مثال من واقع الحياة

قطرا المستطيل



1 **جبر،** الشكل الرباعي $MNOP$ لوحة إعلانية مستطيلة الشكل، فإذا كان $MO = 6x + 14$ و $PN = 9x + 5$، فأوجد قيمة x ثم أوجد NR.

$\overline{MO} \cong \overline{PN}$	قطرا المستطيل متطابقان
$MO = PN$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6x + 14 = 9x + 5$	بالتعويض
$14 = 3x + 5$	طرح $6x$ من الطرفين
$9 = 3x$	طرح 5 من الطرفين
$3 = x$	قسمة الطرفين على 3
$NR = \frac{1}{2} PN$	قطرا المستطيل ينصف كل منهما الآخر
$= \frac{1}{2}(9x + 5)$	بالتعويض
$= \frac{1}{2}(9 \cdot 3 + 5)$	بالتعويض بـ 3 عن x
$= \frac{1}{2}(27 + 5)$	
$= \frac{1}{2}(32)$	
$= 16$	

تحقق من فهمك

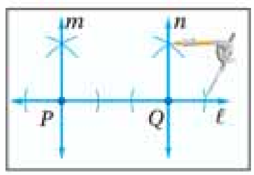
1) ارجع إلى المستطيل $MNOP$. إذا كان $MO = 4y + 12$ و $PR = 3y - 5$، فأوجد قيمة y.

يمكن رسم المستطيل باستعمال المستقيمات المتعامدة.

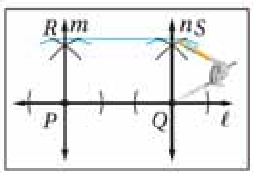
إنشاءات هندسية

المستطيل

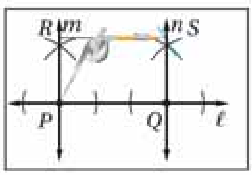
الخطوة 1: استعمل حافة مستقيمة لرسم المستقيم ℓ. عين النقطتين P و Q على ℓ. والآن، ارسم مستقيمين عمودين على ℓ يمران بالنقطتين Q و P وسمهما m و n.



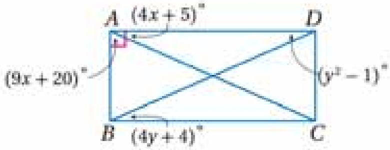
الخطوة 2: ثبت الفرجار في النقطة P وبفتحة مناسبة اقطع المستقيم m في النقطة R. وبالفتحة نفسها ثبت الفرجار في النقطة Q واقطع المستقيم n في النقطة S. وارسم $\overline{RS}$.



الخطوة 3: افتح الفرجار فتحة تساوي PS وقارنها بالفتحة التي تساوي QR. ستجدهما متساويتان.



مثال — زوايا المستطيل



2 جبر: **إذا كان الشكل $ABCD$ مستطيلًا، فأوجد قيمة y.**

بما أن المستطيل متوازي أضلاع فإن الأضلاع المتقابلة متوازية. فتكون الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة.

$\angle ADB \cong \angle CBD$	نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة
$m\angle ADB = m\angle CBD$	تعريف الزوايا المتطابقة
$y^2-1 = 4y+4$	بالتعويض
$y^2-4y-5 = 0$	بطرح $4y$ و 4 من الطرفين.
$(y-5)(y+1) = 0$	بالتحليل.
$y-5=0 \qquad y+1=0$	
$y=5 \qquad y=-1$	بإهمال $y=-1$ لأنها تؤدي إلى زاوية قياسها 0.

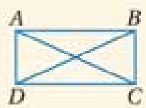
تحقق من فهمك

2) ارجع إلى المستطيل $ABCD$، وأوجد قيمة x.

إثبات أن متوازي الأضلاع مستطيل: عكس النظرية 5-13 صحيح أيضًا.

النظرية 5.14

إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين، فإنه مستطيل.

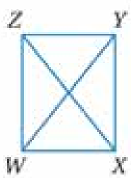


$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

سوف تبرهن النظرية 5-14 في السؤال 33.

مثال من واقع الحياة — قطرا متوازي الأضلاع

3 نوافذ: فتح أحمد نافذة لغرفته، فقام بقياس أبعاد الفتحة ليتأكد من أن الأضلاع المتقابلة متطابقة، ثم قام بقياس طولي القطرين ليتأكد من أنهما متطابقان. كيف يتأكد أن زوايا الفتحة قوائم؟



ارسم أولًا شكلًا وسمّ رؤوسه.

تعلم أن $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$, $\overline{XY} \cong \overline{WZ}$, $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$.

وبما أن $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$ و $\overline{XY} \cong \overline{WZ}$ فإن الشكل $WXYZ$ متوازي أضلاع.

وبما أن $\overline{XZ}$ و $\overline{WY}$ قطراه، وهما متطابقان، إذن فهو مستطيل، وبالتالي فإن زواياه قوائم. لذا فإن زوايا الفتحة قوائم.

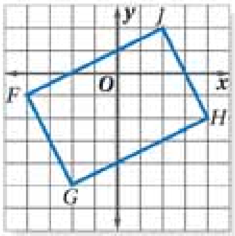
الربط مع الحياة

من المهم أن تكون زوايا فتحة النافذة قوائم؛ حتى تغطي النافذة الفتحة كاملة دون فراغات؛ لأنه مع مرور الوقت قد يتسرب الهواء والرطوبة من الفراغات بين الفتحة والنافذة.

تحقق من فهمك

3) **صناعة يدوية:** يعمل سلطان إطارًا لشهادته، كيف يتأكد من أن زوايا الإطار قوائم؟

مثال 4 المستطيل في المستوى الإحداثي



4 هندسة إحداثية: إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $FGHJ$ هي $F(-4, -1), G(-2, -5), H(4, -2), J(2, 2)$. حدد إذا كان الشكل $FGHJ$ مستطيلًا أم لا.

الطريقة الأولى: استعمل قانون الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ لترى ما إذا كانت الأضلاع المتتالية متعامدة.

$$\text{ميل } \overline{FJ} = \frac{2-(-1)}{2-(-4)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ميل } \overline{GH} = \frac{-2-(-5)}{4-(-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ميل } \overline{FG} = \frac{-5-(-1)}{-2-(-4)} = -2$$

$$\text{ميل } \overline{JH} = \frac{-2-2}{4-2} = -2$$

ولأن $\overline{GH} \parallel \overline{FJ}$ و $\overline{JH} \parallel \overline{FG}$ فإن الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع، ولأن حاصل ضرب ميلي كل ضلعين متتالين فيه يساوي -1، فإن هذا يعني أن $\overline{FJ} \perp \overline{FG}, \overline{FJ} \perp \overline{JH}, \overline{JH} \perp \overline{GH}, \overline{FG} \perp \overline{GH}$. والقطع المتعامدة ينتج عنها أربع زوايا قوائم لذلك، فالشكل $FGHJ$ مستطيل حسب التعريف.

الطريقة الثانية: استعمل قانون المسافة $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ لتحديد إذا كانت الأضلاع المتقابلة متطابقة أم لا.

علينا أولًا إثبات أن الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع.

$$FJ = \sqrt{(-4-2)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$GH = \sqrt{(-2-4)^2+[-5-(-2)]^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$FG = \sqrt{[-4-(-2)]^2+[-1-(-5)]^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$JH = \sqrt{(2-4)^2+[2-(-2)]^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

بما أن كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي $FGHJ$ متساويان في الطول فإنهما متطابقان، إذن فالشكل متوازي أضلاع.

$$FH = \sqrt{(-4-4)^2+[-1-(-2)]^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$$

$$GJ = \sqrt{(-2-2)^2+(-5-2)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$

وبما أن طولي القطرين يساوي $\sqrt{65}$ فإنهما متطابقان. إذن فالشكل $FGHJ$ مستطيل حسب النظرية 5.14.

تحقق من فهمك

4) **هندسة إحداثية:** إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي $J(-10, 2), K(-8, -6), L(5, -3), M(2, 5)$. حدد إذا كان الشكل $JKLM$ مستطيلًا أم لا. برر إجابتك.

إرشادات

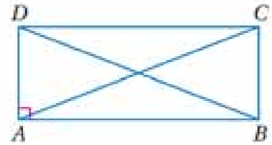
المستطيل ومتوازي الأضلاع

كل مستطيل متوازي أضلاع، ولكن ليس كل متوازي أضلاع مستطيلًا.

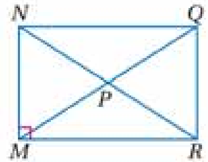
تأكد

مثال 1 (ص 33)

1) **جبر،** الشكل $ABCD$ مستطيل.
إذا كان $AC = 30 - x$ و $BD = 4x - 60$
فأوجد قيمة x.



2) **جبر،** الشكل $MNQR$ مستطيل.
إذا كان $NR = 2x + 10$ و
$NP = 2x - 30$ فأوجد MP.

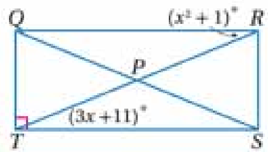


مثال 2 (ص 34)

جبر، الشكل الرباعي $QRST$ مستطيل. أوجد كلًّا من:

3) قيمة x

4) $m\angle RPS$



مثال 3 (ص 34)

5) **عمل إطار،** لدى سمير لوحة على شكل مستطيل أبعادها 12 in و 48 in. أراد عمل إطار لهذه اللوحة. كيف يتأكد صانع الإطارات أن الإطار مستطيل؟ وضح إجابتك.

مثال 4 (ص 35)

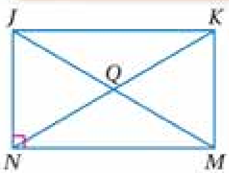
6) **هندسة إحداثية،** إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $EFGH$ هي $E(-4, -3), F(3, -1),$ $G(2, 3), H(-5, 1)$. حدد إذا كان الشكل $EFGH$ مستطيلًا أم لا.

تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين

للأسئلة	انظر الأمثلة
7-12	1
13-21	2
22, 23	3
24-31	4

جبر، الشكل الرباعي $JKMN$ مستطيل.



7) إذا كان $NQ = 5x - 3$ و $QM = 4x + 6$ فأوجد NK.

8) إذا كان $NQ = 2x + 3$ و $QK = 5x - 9$ فأوجد JQ.

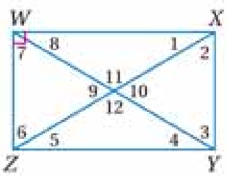
9) إذا كان $NM = 8x - 14$ و $JK = x^2 + 1$ فأوجد JK.

10) إذا كان $m\angle NJM = 2x - 3$ و $m\angle KJM = x + 5$ فأوجد قيمة x

11) إذا كان $m\angle NKM = x^2 + 4$ و $m\angle KNM = x + 30$ فأوجد $m\angle JKN$.

12) إذا كان $m\angle JKN = 2x^2 + 2$ و $m\angle NKM = 14x$ فأوجد قيمة x.

إذا كان الشكل $WXYZ$ مستطيلًا وكان $m\angle 1 = 30$ فأوجد كلًّا مما يلي:



13) $m\angle 2$

14) $m\angle 3$

15) $m\angle 4$

16) $m\angle 5$

17) $m\angle 6$

18) $m\angle 7$

19) $m\angle 8$

20) $m\angle 9$

21) $m\angle 12$

22) **رصيف،** وظّف عامل ليصب رصيفًا مستطيل الشكل بالأسمنت، كيف يمكنه التأكد من أن هذا الرصيف مستطيل؟

23) **تلفاز،** تقاس شاشة التلفاز بحسب طول قطرها. ما طول قطر هذه الشاشة؟

هندسة إحداثية: حدد إذا كان الشكل $DFGH$ مستطيلًا أم لا إذا كانت إحداثيات رؤوسه كما هي معطاة في كل سؤال من الأسئلة **24-26**. وبرر إجابتك.

24) $D(9, -1), F(9, 5), G(-6, 5), H(-6, 1)$

25) $D(6, 2), F(8, -1), G(10, 6), H(12, 3)$

26) $D(-4, -3), F(-5, 8), G(6, 9), H(7, -2)$

هندسة إحداثية: إحداثيات رؤوس الشكل $WXYZ$ هي $W(2, 4), X(-2, 0), Y(-1, -7), Z(9, 3)$. استفد من هذه المعلومات في حل الأسئلة **27-29**.

27) أوجد كل من WY و XZ

28) أوجد إحداثيات نقطة منتصف كل من $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$

29) هل الشكل $WXYZ$ مستطيل؟ وضح إجابتك.

هندسة إحداثية: إحداثيات رؤوس متوازي الأضلاع $ABCD$ هي $A(-4, -4), B(2, -1),$ $C(0, 3), D(-6, 0)$ استفد من هذه المعلومات في حل السؤالين التاليين:

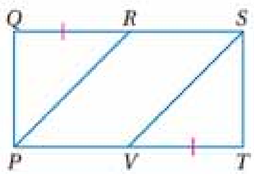
30) حدد ما إذا كان متوازي الأضلاع $ABCD$ مستطيلًا أم لا.

31) إذا كان الشكل $ABCD$ مستطيلًا، وكانت النقاط E, F, G, H منتصفات أضلاعه، فما نوع الشكل $EFGH$؟

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل من الأسئلة **32-35**.

32) النظرية 5.13

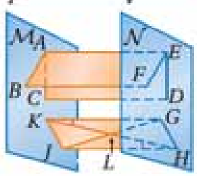
33) النظرية 5.14



34) **المعطيات:** $PQST$ مستطيل .

$\overline{QR} \cong \overline{VT}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{PR} \cong \overline{VS}$



35) **المعطيات:** $DEAC$ و $FEAB$ مستطيلان.

$\angle GKH \cong \angle JHK$

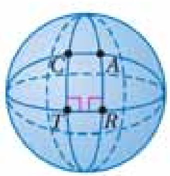
$\overline{GJ}$ و $\overline{HK}$ تتقاطعان عند L.

المطلوب: إثبات أن الشكل $GHJK$ متوازي أضلاع.

ارشادات

مراجعة

لمراجعة الهندسة غير الإقليدية ارجع إلى توسع الدرس 2-6.



هندسة غير إقليدية: في الشكل المجاور، **CART** شكل رباعي مرسوم على سطح كرة فيه: $\overline{CT} \perp \overline{TR}, \overline{AR} \perp \overline{TR}, \overline{CT} \cong \overline{AR}$.
استفد من هذه المعلومات في حل الأسئلة **36-38** .

36) هل $\overline{CT} \parallel \overline{AR}$؟ فسر إجابتك.

37) قارن بين AC , TR؟

38) هل يوجد في الهندسة غير الإقليدية مستطيل؟ وضح إجابتك.

39) **بحث:** استعمل الإنترنت أو أي مصدر آخر لاستقصاء أوجه الشبه والاختلاف بين الهندسة الإقليدية والهندسة غير الإقليدية.

مسائل مهارات التفكير العليا

40) **تبرير:** ارسم مثالًا مضادًّا للجملة "إذا تطابق قطرا شكل رباعي فإنه مستطيل".

41) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثين قائمي الزاوية ومتطابقين ولهما وتر مشترك. هل تشكل الأضلاع الأخرى للمثلثين مستطيلًا؟ وضح إجابتك.

42) **اكتشف الخطأ:** عرّف كل من محمود و عمر المستطيل كما يلي. من منهما إجابته خطأ؟ وضح إجابتك.

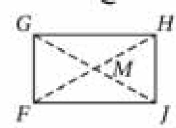
محمود	عمر
المستطيل له ضلعان متقابلان متوازيان وإحدى زواياه قائمة.	المستطيل هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة.

43) **تحدٍّ:** ما عدد المستطيلات التي يمكن رسمها باستعمال أربع نقاط من بين اثنتي عشرة نقطة كرؤوس للمستطيل؟

44) **اكتب:** كيف يمكنك تحديد إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا أم لا؟

تدريب على اختبار معياري

45) إذا كان $FJ = -3x + 5y, FM = 3x + y$ و $GH = 11, GM = 13$ فما قيمة كل من x و y اللتان تجعلان متوازي الأضلاع $FGHJ$ مستطيلًا؟



A $x = 3, y = 4$

B $x = 7, y = 8$

C $x = 4, y = 3$

D $x = 8, y = 7$

46) **مراجعة:** قطعة أرض مستطيلة الشكل محاطة بسياج طوله 80 m. يزيد طول أحد أضلاعها بـ 10 m عن طول الضلع الآخر. فما المعادلة التي تستعمل لإيجاد طول الضلع الأقصر (s)؟

A $10s + s = 80$

B $4s + 10 = 80$

C $s(s + 10) = 80$

D $2(s + 10) + 2s = 80$

مراجعة تراكمية

47) **فن بصري:** تحتوي الصورة إلى اليسار على عدة أشكال من متوازي الأضلاع وبعدة ألوان. صف إحدى الطرق للتأكد من أن هذه الأشكال متوازي أضلاع. (الدرس 3-5)

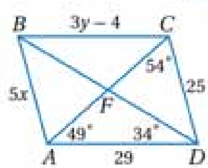
للأسئلة 51-48 استعمل $\square ABCD$ لإيجاد قيمة كل رمز أو قياس كل زاوية. (الدرس 2-5)

48) $m\angle AFD$

49) $m\angle CDF$

50) y

51) x



استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يلي: (مهارة سابقة)

52) $(1, -2), (-3, 1)$

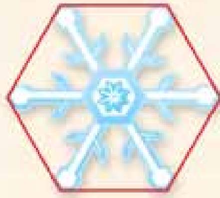
53) $(-5, 9), (5, 12)$

54) $(1, 4), (22, 24)$

اختبار منتصف الفصل

الدروس 1 - 5 إلى 4 - 5

1) **ثلج:** إذا كانت صورة بلورة الثلج على شكل سداسي منتظم. فأوجد مجموع قياسات زواياه الداخلية. (الدرس 1-5)



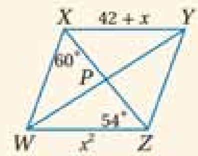
2) إذا كان قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم $147\frac{3}{11}$، فأوجد عدد أضلاع هذا المضلع. (الدرس 1-5)

3) ما مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع الذي عدد أضلاعه 12؟ (الدرس 1-5)

4) أوجد قياس كل زاوية خارجية للخماسي المنتظم. (الدرس 1-5)

5) إذا كان قياس كل زاوية خارجية لمضلع منتظم يساوي $40°$ فكم ضلعًا لهذا المضلع؟ (الدرس 1-5)

استعمل $\square WXYZ$ لإيجاد كل مما يلي: (الدرس 2-5)



6) $WZ = \underline{\ ?\ }$

7) $m\angle XYZ = \underline{\ ?\ }$

8) **اختيار من متعدد:** إذا كان قياسا زاويتين متقابلتين لمتوازي أضلاع: $(5x - 25)°$ و $(3x + 5)°$، فأوجد قياسي هاتين الزاويتين. (الدرس 2-5)

A $50, 50$

B $55, 125$

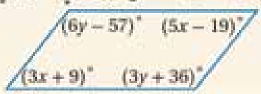
C $90, 90$

D $109, 71$

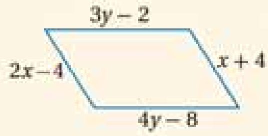
9) $JKLM$ متوازي أضلاع إحداثيات ثلاثة من رؤوسه هي $J(0, 7)$, $K(9, 7)$, $L(6, 0)$. أوجد واحدًا من إحداثيات الرأس M الممكنة. (الدرس 2-5)

جبر: في كل من السؤالين 10 و 11 أوجد قيمة كل من x و y اللتين تجعلان الشكل الرباعي متوازي أضلاع. (الدرس 3-5)

10)



11)



هندسة إحداثية: حدد إذا كان كل شكل رؤوسه معطاة في السؤالين 12 و 13 متوازي أضلاع أم لا. استعمل الطريقة المشار إليها. (الدرس 3-5)

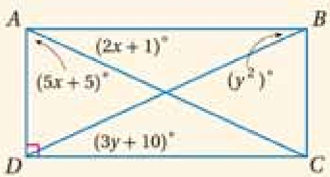
12) $Q(-3, -6), R(2, 2), S(-1, 6), T(-5, 2)$

قانونا المسافة والميل

13) $W(-6, -5), X(-1, -4), Y(0, -1), Z(-5, -2)$

قانون نقطة المنتصف

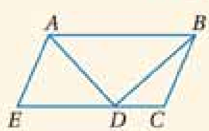
إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ مستطيلًا فأجب عن السؤالين 14 و 15. (الدرس 4-5)



14) أوجد قيمة x.

15) أوجد قيمة y.

16) **اختيار من متعدد:** الشكل الرباعي $ABCE$ أدناه متوازي أضلاع. إذا كانت $\angle ADE \cong \angle BDC$ ، فأي الجمل التالية صحيحة؟ (الدرس 4-5)



A $\overline{AD} \cong \overline{DB}$

B $\overline{ED} \cong \overline{DC}$

C $\overline{ED} \cong \overline{AD}$

D $\overline{AE} \cong \overline{DC}$

5-5 المعيّن والمربع
Rhombus and Square

الأفكار الرئيسة

- أتعرف خصائص المعيّن وأطبقها.
- أتعرف خصائص المربع وأطبقها.

المفردات :

المعيّن
Rhombus

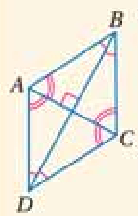
المربع
Square

استعد

طور عالمٌ دراجة هوائية بإطارات مربعة، تسهل قيادتها على طرق خاصة منحنية كما في الصورة.

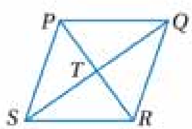
خصائص المعيّن: **المعيّن** هو حالة من متوازي الأضلاع. والمعيّن هو شكل رباعي جميع أضلاعه متطابقة. وتتوفر فيه جميع خصائص متوازي الأضلاع بالإضافة إلى خصائص أخرى سنذكرها من خلال النظريات التالية:

النظريات — المعيّن

	أمثلة	
5.15 قطرا المعيّن متعامدان.	$\overline{AC} \perp \overline{BD}$	
5.16 إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متعامدين فإنه معيّن. (عكس النظرية 5.15)	إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ فإن $\square ABCD$ معيّن.	
5.17 القطر في المعيّن ينصف الزاويتين المتقابلتين اللتين يمرّ بهما.	$\angle DAC \cong \angle BAC \cong \angle DCA \cong \angle BCA$ $\angle ABD \cong \angle CBD \cong \angle ADB \cong \angle CDB$	

سوف تبرهن النظريتين 5.16 و 5.17 في السؤالين 9 و 10 على الترتيب.

مثال 1 برهان النظرية 5-15



المعطيات: $PQRS$ معيّن.

المطلوب: إثبات أن $\overline{PR} \perp \overline{SQ}$

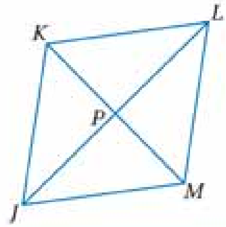
برهان حر: حسب تعريف المعيّن فإن $\overline{PS} \cong \overline{RS} \cong \overline{QR} \cong \overline{PQ}$.
وبما أن المعيّن متوازي أضلاع، وقطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر، فإن $\overline{QS}$ ينصف $\overline{PR}$ في T. لذلك $\overline{PT} \cong \overline{RT}$.
و $\overline{QT} \cong \overline{QT}$ لأن تطابق القطع المستقيمة انعكاسي، إذن $\triangle PQT \cong \triangle RQT$ حسب مسلمة SSS.
ومنه ينتج أن $\angle QTP \cong \angle QTR$ حسب تعريف المثلثات المتطابقة، وبما أن $\angle QTP$ و $\angle QTR$ متجاورتان على خط مستقيم. لذلك فكل زاوية منهما قائمة؛ لأن الزاويتين المتطابقتين والمتجاورتين على خط مستقيم تكونان قائمتين. وبما أن $\angle QTP$ قائمة فإن $\overline{PR} \perp \overline{SQ}$ حسب تعريف المستقيمات المتعامدة.

إرشادات

برهان

بما أن أضلاع المعيَّن الأربعة متطابقة فإن قطره يقسمه إلى مثلثين متطابقي الضلعين ومتطابقين. وقطرا المعيَّن يقسمانه إلى أربعة مثلثات قائمة الزاوية ومتطابقة.

تحقق من فهمك



1) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.

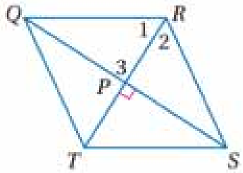
المعطيات: $JKLM$ متوازي أضلاع.

$\triangle JKL$ متطابق الضلعين.

المطلوب: إثبات أن $JKLM$ معيَّن.

مثال

قياسات في المعيَّن



2 **جبر:** استعمل المعيَّن $QRST$ والمعلومات المعطاة لإيجاد قيمة كل متغير.

a) أوجد قيمة y إذا كان $m\angle 3 = y^2 - 31$.

$m\angle 3 = 90$	قطرا المعيَّن متعامدان.
$y^2 - 31 = 90$	بالتعويض
$y^2 = 121$	بإضافة 31 للطرفين.
$y = \pm 11$	بأخذ الجذر التربيعي للطرفين.

أي أن قيمة y يمكن أن تكون 11 أو -11.

b) أوجد $m\angle TQS$ إذا كان $m\angle RST = 56$.

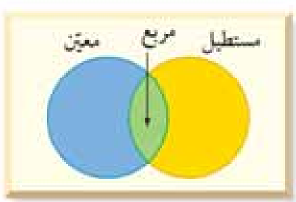
$m\angle TQR = m\angle RST$	الزوايا المتقابلة متطابقة.
$m\angle TQR = 56$	بالتعويض

وبما أن قطري المعيَّن ينصفان الزاويتين المتقابلتين اللتين يمران بهما، فإن $m\angle TQS = \frac{1}{2}(56) = 28$.

تحقق من فهمك

2) **جبر:** استعمل المعيَّن $QRST$ لإيجاد $m\angle QTS$، إذا كان $m\angle 2 = 57$.

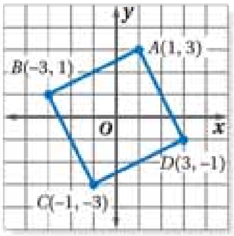
خصائص المربع: إذا كان الشكل الرباعي معيّنًا ومستطيلًا فإنه **يكون مربعًا**، وتتحقق جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعيّن في المربع.



مثال

المربع

3 **هندسة إحداثية:** حدد إذا كان متوازي الأضلاع $ABCD$ معيّنًا أو مستطيلًا أو مربعًا. برر إجابتك.



استكشف استعمل إحداثيات الرؤوس المحددة على المستوى الإحداثي.

خطط إذا كان قطرا الشكل $ABCD$ متطابقين فإنه مستطيل وإذا كان القطران متعامدين فإنه يكون إما معيّنًا وإما مربعًا.
وإذا كان القطران متطابقين ومتعامدين فإن الشكل $ABCD$ يكون مربعًا.

حل استعمل قانون المسافة لمقارنة طولي القطرين.

$$AC = \sqrt{[1-(-1)]^2 + [3-(-3)]^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$DB = \sqrt{[3-(-3)]^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

استعمل الميل لتحديد إذا كان القطران متعامدين أم لا.

$$\overline{AC} \text{ ميل } = \frac{-3-3}{-1-1} = 3 \qquad \overline{DB} \text{ ميل } = \frac{1-(-1)}{-3-3} = -\frac{1}{3}$$

وبما أن حاصل ضرب ميل $\overline{AC}$ بميل $\overline{DB}$ يساوي -1 فإن القطرين متعامدان.

ولأن $\overline{DB}$ و $\overline{AC}$ متساويان في الطول فإنهما متطابقان. إذن فالشكل $ABCD$ معيّن ومستطيل ومربع.

تحقق يمكنك التحقق من أن الشكل $ABCD$ مربع بإيجاد طول كل ضلع وميله. وستجد أن الأضلاع الأربعة متطابقة، وكل ضلعين متتاليين متعامدين.

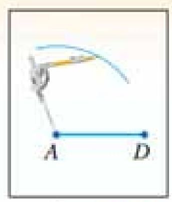
تحقق من فهمك

3) **هندسة إحداثية:** إحداثيات رؤوس متوازي الأضلاع $JKLM$ هي: $J(5, 0), K(8, -11), L(-3, -14), M(-6, -3)$. حدّد إذا كان متوازي الأضلاع معيّنًا أو مستطيلًا أو مربعًا. برر إجابتك.

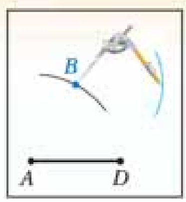
إنشاءات هندسية

المعيّن

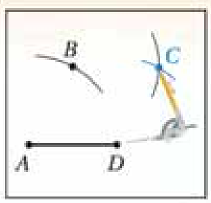
الخطوة 1: ارسم قطعة مستقيمة $\overline{AD}$. ثبت الفرجار عند النقطة A وافتحه بقدر AD وارسم قوسًا أعلى $\overline{AD}$



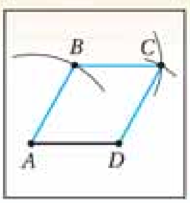
الخطوة 2: عين أي نقطة على القوس مثل B. واستعمل فتحة الفرجار نفسها وثبته عند النقطة B، وارسم قوسًا إلى يمين B.



الخطوة 3: ثبت الفرجار عند النقطة D، وارسم قوسًا يقطع القوس المرسوم من النقطة B. سمّ نقطة التقاطع C.

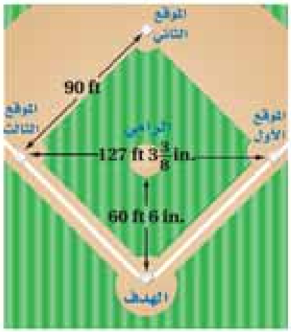


الخطوة 4: استعمل حافة مستقيمة لرسم $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$



نتيجة: بما أن جميع الأضلاع متطابقة فإن الشكل الرباعي $ABCD$ معيّن.

مثال من واقع الحياة — قطرا المربع



4 بيسبول: يكون الميدان الأوسط للعبة البيسبول مربعًا كما هو مبين في الصورة إلى اليسار. هل موقع الرامي يقع في مركز الميدان؟ وضح إجابتك.

بما أن المربع متوازي أضلاع فإن قطريه ينصف كل منهما الآخر. بما أن المربع مستطيل فإن قطريه متطابقان. لذلك فالمسافة من الموقع الأول إلى الموقع الثالث تساوي المسافة بين الهدف والموقع الثاني.

لذلك فالمسافة من الهدف إلى مركز الميدان تساوي نصف المسافة 127 ft و $3\frac{3}{8}$ in أي 63 ft و $7\frac{11}{16}$ in.

ولكن هذه المسافة أطول من المسافة من الهدف إلى موقع الرامي. لذلك فموقع الرامي لا يقع عند مركز الميدان بل هو أقرب إلى الهدف بـ 3 ft.

تحقق من فهمك

4) زجاج ملون: صممت كوثر قطعة زجاج ملونة تتكون من أجزاء كلٌّ منها معيَّن. صف كيف يمكنها تحديد إذا كانت الأجزاء على شكل معين فعلًا أم لا.

إذا كان الشكل الرباعي معيّنًا أو مربّعًا فإن الخصائص التالية تكون صحيحة:

ملخص المفاهيم — خواص المعيّن والمربع

المعيّن	المربع
1) يحقق المعيّن كافة خصائص متوازي الأضلاع.	1) يحقق المربع كافة خصائص متوازي الأضلاع.
2) جميع الأضلاع متطابقة.	2) يحقق المربع كافة خصائص المستطيل.
3) القطران متعامدان.	3) يحقق المربع كافة خصائص المعيّن.
4) القطران ينصفان زوايا المعيّن.	

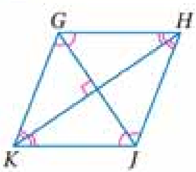
إرشادات — المربع والمعيّن

كل مربع معيّن، وليس كل معيّن مربع.

تأكد

مثال 1 (ص 40)

1) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

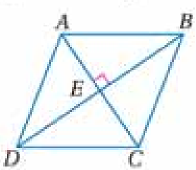


المعطيات: $\triangle KGH, \triangle HJK, \triangle GHJ, \triangle JKG$ مثلثات متطابقة الضلعين.

المطلوب: إثبات أن $GHJK$ معيّن.

مثال 2 (ص 41)

جبر: في المعيّن $ABCD$، $AB = 2x + 3$ و $BC = 5x$، استفد من هذه المعطيات في الإجابة عن الأسئلة من 5-2:



2) أوجد قيمة x.

3) أوجد AD.

4) أوجد $m\angle AEB$.

5) أوجد $m\angle BCD$ إذا كان $m\angle ABC = 83.2$.

مثال 3 (ص 42) **هندسة إحداثية:** باستعمال كل مجموعة من إحداثيات الرؤوس في السؤالين 6 و 7، حدد إذا كان $\square MNPQ$ معيّنًا أو مستطيلًا أو مربعًا. برّر إجابتك.

6) $M(0,3), N(-3,0), P(0,-3), Q(3,0)$

7) $M(-4,0), N(-3,3), P(2,2), Q(1,-1)$

مثال 4 (ص 43) 8) **تجديد:** تجدد عائلة خليفة مطبخًا. فإذا كان طول كل ضلع لأرضية المطبخ يساوي 10 ft. فما القياسات الأخرى التي يجب معرفتها لتحديد إذا كانت أرضية المطبخ مربعة أم لا؟

تمارين ومسائل

إرشادات

للتمارين	
انظر الأمثلة	للأسئلة
1	9-14
2	15-18
3	19-22
4	23-24

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكل من النظريتين التاليتين:

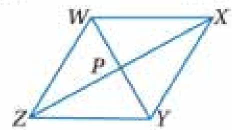
9) النظرية 5.16

10) النظرية 5.17

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل سؤال من الأسئلة 11-14.

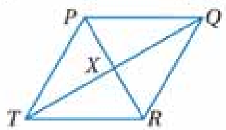
11) **المعطيات:** $\triangle WZY \cong \triangle WXY$، $\triangle WZY, \triangle XYZ$ مثلثان متطابقا الضلعين.

المطلوب: إثبات أن $WXYZ$ معيّن.



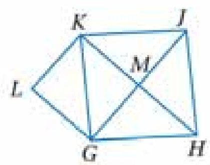
12) **المعطيات:** $\triangle TPX \cong \triangle QPX \cong \triangle QRX \cong \triangle TRX$

المطلوب: إثبات أن $TPQR$ معيّن.



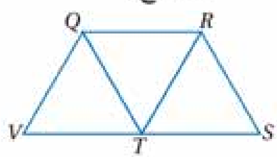
13) **المعطيات:** $\triangle LGK \cong \triangle MJK$، $GHJK$ متوازي أضلاع.

المطلوب: إثبات أن $GHJK$ معيّن.

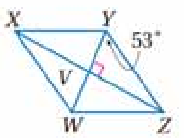


14) **المعطيات:** $QRST$ و $QRTV$ معيّنان.

المطلوب: إثبات أن $\triangle QRT$ متطابق الأضلاع.



جبر: استعمل المعيّن $XYZW$ حيث $m\angle WYZ = 53$، $VW = 3, XV = 2a - 2, ZV = \frac{5a+1}{4}$ في حل الأسئلة 15-18.



15) أوجد $m\angle YZV$.

16) أوجد $m\angle XYW$.

17) أوجد XZ.

18) أوجد XW.

هندسة إحداثية: باستعمال كل مجموعة من إحداثيات الرؤوس في الأسئلة 19-22، حدد إذا كان $\square EFGH$ معيّنًا أو مستطيلًا أو مربعًا. برّر إجابتك.

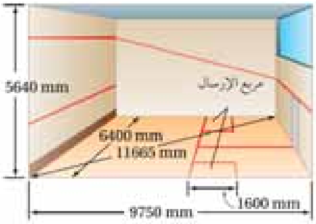
19) $E(1,10), F(-4,0), G(7,2), H(12,12)$

20) $E(-7,3), F(-2,3), G(1,7), H(-4,7)$

21) $E(1,5), F(6,5), G(6,10), H(1,10)$

22) $E(-2,-1), F(-4,3), G(1,5), H(3,1)$

إسكواش: للسؤالين **23** و **24** استعمل الشكل إلى اليسار لقاعة لعبة الإسكواش.



23) يشير الشكل إلى أن طول قطر أرضية القاعة 11665 mm. هل هذا صحيح؟ وضح إجابتك.

24) أماكن الإرسال مربعة الشكل. أوجد طول قطرها.

ارسم كل شكل مما يلي باستعمال المسطرة والفرجار.

25) مربعًا طول أحد أضلاعه 3 cm.

26) مربعًا طول قطره 5 cm.

27) **فسيفساء:** يتكون هذا النمط من أشكال متكررة. استعمل مسطرة أو منقلة لتحديد نوع الأشكال الرباعية حمراء اللون.

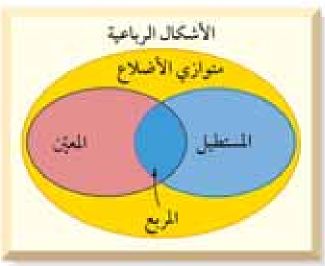
28) **تصميم:** قاعدة حامل أحواض الزهور إلى اليمين مربعة، وقاعدة كل صندوق من الصناديق الخمسة مربعة، وطول ضلع قاعدة كل صندوق صغير تساوي نصف طول ضلع قاعدة الحامل. استعمل المعلومات إلى اليمين لإيجاد أبعاد قاعدة صندوق صغير.

الربط مع الحياة

ارتفاع حامل أحواض الزهور $36\frac{1}{2}$ in وطول ضلع قاعدته $15\frac{3}{4}$ in.

29) **المحيط:** إذا كان طولي قطري معيّن 12 cm و 16 cm، فأوجد محيطه.

استعمل شكل فن (Venn) لتحديد إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا:



30) متوازي الأضلاع يكون مربعًا.

31) المربع يكون معيّنًا.

32) المستطيل يكون متوازي أضلاع.

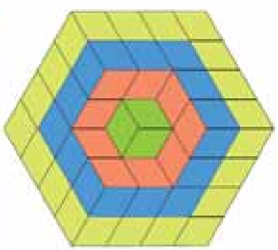
33) المعيّن يكون مستطيلًا وليس مربعًا.

34) المعيّن يكون مربعًا.

35) صح أم خطأ؟ لا يمكن أن يكون الشكل الرباعي مربعًا ما لم يكن مستطيلًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) **تحدٍ:** يتكون النمط إلى اليمين من سلسلة من المعيّنات تتوالى لتكون أشكالًا سداسية متزايدة في المساحة. انقل الجدول وأكمله.



السداسي	عدد المعيّنات
1	3
2	12
3	27
4	48
5	
6	
x	

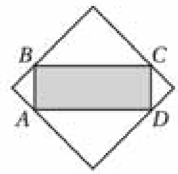
37) **تحدٍ،** اكتب عكس النظرية 5.17. ثم اكتب برهانًا حرًّا له.

38) **مسألة مفتوحة،** أوجد إحداثيات رؤوس مربع يقع قطراه على المستقيمين $y = x$ و $y = -x + 6$ برر إجابتك.

39) **اكتب،** ارجع إلى المعلومات في الصفحة 40. ووضح الفرق بين المربع والمعيّن، ثم صف كيف تسير عجلات معيّنية الشكل ليست مربعة. على أرض متكررة الانحناء.

تدريب على اختبار معياري

40) تقع النقاط A, B, C, D على مربع إذا كانت مساحة المربع 36 وحدة مربعة. فما محيط المستطيل $ABCD$؟



A 24 وحدة

B $12\sqrt{2}$ وحدة

C 12 وحدة

D $6\sqrt{2}$

41) **مراجعة،** إذا لم يكن للمعادلة أدناه حلول حقيقية، فأي الأعداد التالية لا يمكن أن يكون قيمة لـ a؟

$$ax^2 - 6x + 2 = 0$$

A 4

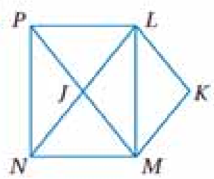
B 5

C 6

D 7

مراجعة تراكمية

جبر، استعمل المستطيل $LMNP$، ومتوازي الأضلاع $LKMJ$، والمعلومات المعطاة لحل كل سؤال من الأسئلة 42-44. (الدرس 4-5)



42) إذا كان $LN = 10, LJ = 2x + 1, PJ = 3x - 1$ فأوجد قيمة x.

43) إذا كان $m\angle PLK = 110$ فأوجد $m\angle LKM$.

44) إذا كان $m\angle MJN = 35$ فأوجد $m\angle MPN$.

هندسة إحداثية، حدد إذا كانت النقاط في كل من السؤالين 45،46 هي رؤوس متوازي أضلاع أم لا. استعمل الطريقة المشار إليها. (الدرس 3-5)

45) $P(0, 2), Q(6, 4), R(4, 0), S(-2, -2)$، قانون المسافة

46) $K(-3, -7), L(3, 2), M(1, 7), N(-3, 1)$ ، قانون الميل

47) **هندسة،** المسافة بين مكة المكرمة والمدينة المنورة 358 km. والمسافة بين مكة المكرمة ومدينة حائل 790 km. استعمل نظرية متباينة المثلث لإيجاد المسافة الممكنة بين مدينتي حائل والمدينة المنورة.

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية، حل كل معادلة مما يلي:

48) $\frac{1}{2}(8x - 6x - 7) = 5$

49) $\frac{1}{2}(7x + 3x + 1) = 12.5$

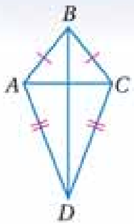
50) $\frac{1}{2}(4x + 6 + 2x + 13) = 15.5$

توسع
5-5

معمل الهندسة

شكل الطائرة الورقية

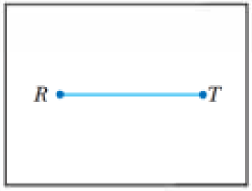
Kite



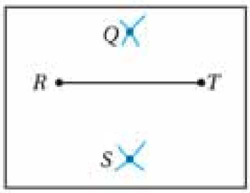
شكل **الطائرة الورقية** هو شكل رباعي فيه زوجان متمايزان من الأضلاع المتجاورة والمتطابقة. ففي شكل الطائرة الورقية إلى اليسار، القطر $\overline{BD}$ يقسم الشكل إلى مثلثين متطابقين (SSS)، القطر $\overline{AC}$ يقسم الشكل إلى مثلثين متطابقي الضلعين ولكنهما غير متطابقين.

نشاط ارسم شكل الطائرة الورقية $QRST$.

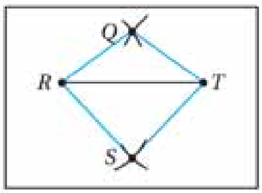
الخطوة الأولى ارسم $\overline{RT}$.



الخطوة الثانية افتح الفرجار فتحة أكبر من $\frac{1}{2}RT$. وثبته عند النقطة R وارسم قوسًا أعلى $\overline{RT}$. وبالفتحة نفسها انقل الفرجار وثبته عند النقطة T وارسم قوسًا يقطع القوس الأول. سم نقطة التقاطع Q. كبر فتحة الفرجار وثبته عند النقطة R وارسم قوسًا أسفل $\overline{RT}$. وبالفتحة نفسها انقل الفرجار وثبته عند T وارسم قوسًا يقطع القوس السابق. سمّ نقطة التقاطع S.



الخطوة الثالثة ارسم $QRST$.



نموذج

1) ارسم $\overline{QS}$ في شكل الطائرة الورقية $QRST$. استعمل المنقلة لقياس الزوايا الناتجة عن تقاطع $\overline{QS}$ و $\overline{RT}$.
2) أوجد قياسات الزوايا الداخلية لشكل الطائرة الورقية $QRST$. هل توجد زوايا متطابقة؟
3) سمّ نقطة تقاطع $\overline{QS}$ و $\overline{RT}$ بالنقطة N. أوجد طول كل من $\overline{QN}, \overline{NS}, \overline{TN}, \overline{NR}$. ما العلاقة بين هذه القطع؟
4) كم زوجًا من المثلثات المتطابقة يمكنك أن تجد في شكل الطائرة الورقية $QRST$؟
5) ارسم شكل طائرة ورقية آخر وسمّه $JKLM$. وكرر الأسئلة 4–1.
6) كوّن استنتاجًا حول زوايا وأضلاع وقطرا شكل الطائرة الورقية.
7) حدد إذا كانت الخطوط المستقيمة التي معادلاتها $y = 4x - 3, y = 7x - 60, x - 4y = -3,$ $x - 7y = -60$ تحدد أضلاع شكل طائرة ورقية أم لا. برر إجابتك.

5-6 شبه المنحرف
Trapezoid

الأفكار الرئيسة
- أتعرف خصائص شبه المنحرف وأطبقها.
- أحل مسائل تتضمن القطعة المتوسطة لشبه المنحرف.

المفردات
شبه منحرف
Trapezoid

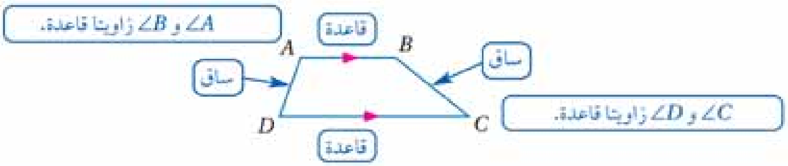
شبه منحرف متطابق الساقين
IsoscelesTrapezoid

القطعة المتوسطة
Median

استعد

تعد الأهرامات في جمهورية مصر العربية من أبرز المعالم السياحية التي يعود تاريخها إلى وقت مبكر من عهد القراعنة. وبعض أوجه تلك الأهرامات تظهر فيها عدة أشكال هندسية، منها ما يسمى شبه منحرف .

خصائص شبه المنحرف: **شبه المنحرف** هو شكل رباعي فيه فقط ضلعان متوازيان. يسمى كل منهما قاعدة. وكل قاعدة تشكل مع ساقي شبه المنحرف زاويتين هما زاويتا القاعدة. ويسمّى الضلعان غير المتوازيين ساقي شبه المنحرف. وإذا كان الساقان متطابقين فإنه يسمَّى **شبه منحرف متطابق الساقين**.



النظريات — شبه المنحرف متطابق الساقين

5.18 زاويتا كل قاعدة لشبه المنحرف متطابق الساقين متطابقتان.

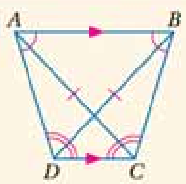
5.19 قطرا شبه المنحرف متطابق الساقين متطابقان.

مثال:

$\angle DAB \cong \angle CBA$

$\angle ADC \cong \angle BCD$

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

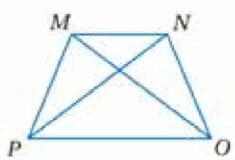


مثال — برهان النظرية 5.19

1 اكتب برهانا تسلسليًا للنظرية 5.19

المعطيات: $MNOP$ شبه منحرف متطابق الساقين.

المطلوب: إثبات أن $\overline{MO} \cong \overline{NP}$



البرهان:

$MNOP$ شبه منحرف متطابق الساقين — معطى

$\overline{MP} \cong \overline{NO}$ — تعريف شبه المنحرف متطابق الساقين

$\angle MPO \cong \angle NOP$ — زاويتا كل قاعدة لشبه المنحرف متطابق الساقين متطابقتان

$\overline{PO} \cong \overline{PO}$ — خاصية الانعكاس

$\triangle MPO \cong \triangle NOP$ — SAS

$\overline{MO} \cong \overline{NP}$ — تعريف تطابق المثلثات

تحقق من فهمك

1) برهان: اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 5.18.

مثال من واقع الحياة تحديد شبه المنحرف متطابق الساقين

2 فن: الباب المفتوح في لوحة هذا الرسام هو في الواقع مستطيل، إلا أنه للتعبير عنه كشكل ثلاثي البعد، فإنه يرسم على المستوى على شكل شبه منحرف. استعمل المسطرة والمنقلة لتحديد إذا كانت صورة الباب في اللوحة شبه منحرف متطابق الساقين أم لا.

صورة الباب في اللوحة شبه منحرف متطابق الساقين؛ فقاعدتاه متوازيتان ومختلفتان في الطول. أما ساقاه فهما غير متوازيين وهما متساويان في الطول.

تحقق من فهمك

2) استعمل الفرجار والمسطرة لرسم مثلث متطابق الأضلاع. وارسم قطعة مستقيمة طرفاها منتصفا ضلعين من أضلاع المثلث. استعمل المنقلة والمسطرة لتحديد إذا كانت هذه القطعة المستقيمة تقسم المثلث إلى مثلث متطابق الأضلاع وشبه منحرف متطابق الساقين أم لا.

مثال تحديد شبه المنحرف

3 هندسة إحداثية: إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي $J(-18, -1), K(-6, 8), L(18, 1), M(-18, -26)$.

a) تحقق من أن الشكل $JKLM$ شبه منحرف.

يكون الشكل الرباعي شبه منحرف إذا كان فيه فقط ضلعان متقابلان متوازيان. استعمل قانون الميل.

ميل $\overline{ML} = \frac{1-(-26)}{18-(-18)} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

ميل $\overline{JK} = \frac{8-(-1)}{-6-(-18)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

ميل $\overline{KL} = \frac{1-8}{18-(-6)} = \frac{-7}{24}$

ميل $\overline{JM} = \frac{-26-(-1)}{-18-(-18)}$

$= \frac{-25}{0}$ (غير معرف)

بما أن ميل $\overline{JK}$ = ميل $\overline{ML}$، فإن $\overline{ML} \parallel \overline{JK}$، والشكل $JKLM$ شبه منحرف.

b) حدد إذا كان الشكل $JKLM$ شبه منحرف متطابق الساقين أم لا. وضح إجابتك.

استعمل قانون المسافة لبيان أن الساقين متطابقان.

$KL = \sqrt{(-6-18)^2 + (8-1)^2}$

$= \sqrt{576+49} = \sqrt{625} = 25$

$JM = \sqrt{[-18-(-18)]^2 + [-1-(-26)]^2}$

$= \sqrt{0+625} = \sqrt{625} = 25$

بما أن الساقين متطابقان، فإن الشكل $JKLM$ شبه منحرف متطابق الساقين.

تحقق من فهمك

3 إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $QRST$ هي: $Q(-8, -4), R(0, 8), S(6, 8), T(-6, -10)$. تحقق من أن الشكل $QRST$ شبه منحرف، ثم حدد إن كان شبه المنحرف متطابق الساقين.

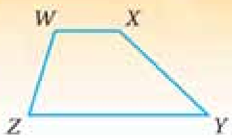
القطعة المتوسطة لشبه المنحرف: تسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ساقي شبه المنحرف **القطعة المتوسطة**. وهي توازي كلًّا من القاعدتين وعلى بعدين متساويين من القاعدتين. ويمكن رسم **القطعة المتوسطة** لشبه المنحرف باستعمال المسطرة والفرجار.

معمل الهندسة

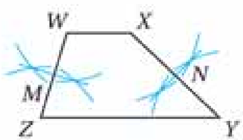
القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

نموذج

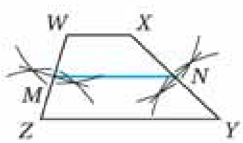
الخطوة الأولى ارسم شبه المنحرف WXYZ الذي ساقاه $\overline{XY}, \overline{WZ}$.



الخطوة الثانية ارسم العمودين المنصفين لكل من $\overline{WZ}, \overline{XY}$ وسم نقطتي المنتصف M و N.



الخطوة الثالثة ارسم $\overline{MN}$.



حلل

1) أوجد طول كل من $\overline{WX}, \overline{ZY}, \overline{MN}$ لأقرب ملليمتر.

2) اكتب تخمينًا مبنيًا على ملاحظاتك.

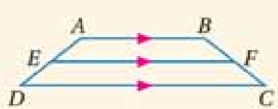
3) ارسم شبه منحرف آخر متطابق الساقين، وكرر الخطوات السابقة. هل تخمينك صحيح؟ وضح إجابتك.

نتائج معمل الهندسة تقود إلى النظرية 5.20 التالية:

النظرية 5.20

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف توازي كلًّا من القاعدتين، وطولها يساوي نصف مجموع طوليهما.

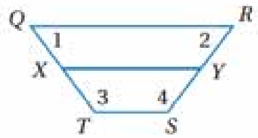
مثال: $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$



سوف تبرهن النظرية 5.20 في السؤال 26 من الدرس 7-5.

مثال من واقع الحياة — القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

4 **جبر:** شبه المنحرف متطابق الساقين $QRST$ في الشكل المجاور يمثل أرضية بركة سباحة، والقطعة المتوسطة $\overline{XY}$ تمثل الحد الفاصل بين جزأي البركة اللذين عمقاهما $1m$ ، $2m$.



a) أوجد TS إذا كان $QR = 22$ و $XY = 15$.

$XY = \frac{1}{2}(QR + TS)$ النظرية 5.20

$15 = \frac{1}{2}(22 + TS)$ بالتعويض

$30 = 22 + TS$ بضرب الطرفين في 2

$8 = TS$ بطرح 22 من الطرفين

b) أوجد $m\angle1, m\angle2, m\angle3, m\angle4$ إذا كان $m\angle1 = 4a - 10$ ، $m\angle3 = 3a + 32.5$.

بما أن $\overline{QR} \parallel \overline{TS}$، إذن $\angle1, \angle3$ متكاملتان. ولأن شبه المنحرف متطابق الساقين، فإن $\angle1 \cong \angle2, \angle3 \cong \angle4$.

$m\angle1 + m\angle3 = 180$ نظرية الزاويتين الداخليتين المتحالفتين

$4a - 10 + 3a + 32.5 = 180$ بالتعويض

$7a + 22.5 = 180$ بتجميع الحدود المتشابهة

$7a = 157.5$ بطرح 22.5 من الطرفين

$a = 22.5$ بقسمة الطرفين على 7

وحيث إنّ $a = 22.5$ فإن $m\angle1 = 80, m\angle3 = 100$.

ولأن $\angle1 \cong \angle2, \angle3 \cong \angle4$، فإن $m\angle2 = 80, m\angle4 = 100$.

تحقق من فهمك

4A) **جبر:** $JKLM$ شبه منحرف متطابق الساقين فيه $\overline{JK} \parallel \overline{LM}$ و $\overline{RP}$ القطعة المتوسطة. أوجد RP إذا كان $JK = 2(x + 3), RP = 5 + x, ML = \frac{1}{2}x - 1$.

4B) أوجد قياس كل زاوية من زوايا الشكل $JKLM$ إذا كان $m\angle J = 3x + 12$ ، $m\angle L = x$.

إرشادات

شبه المنحرف متطابق الساقين

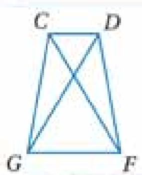
إذا مددت ساقي شبه المنحرف متطابق الساقين حتى يلتقيا فإنك ستحصل على مثلث متطابق الضلعين.

تذكر أن زاويتي القاعدة للمثلث متطابق الضلعين متطابقتان.

تأكد

مثال 1 (ص 48)

1) **برهان:** $CDFG$ شبه منحرف متطابق الساقين قاعدتاه $\overline{CD}$ ، $\overline{FG}$. اكتب برهانًا تسلسليًّا لإثبات أن $\angle DGF \cong \angle CFG$.



مثال 2 (ص 49)

2) **تصميم:** تستخدم الأشكال الهندسية بكثرة في تصميم السيارات. ما الأشكال الرباعية في الصورة المجاورة؟

مثال 3 (ص 49)

هندسة إحداثية: إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $QRST$ هي $Q(-3, 2), R(-1, 6), S(4, 6), T(6, 2)$.

3) تحقق من أن الشكل $QRST$ شبه منحرف.

4) حدد إذا كان الشكل $QRST$ شبه منحرف متطابق الساقين أم لا. وضح إجابتك.

مثال 4
(ص 51)

5) **جبر،** $EFGH$ شبه منحرف متطابق الساقين قاعدتاه $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ وقطعته المتوسطة $\overline{YZ}$. فإذا كان $EF = 3x + 8,\ GH = 4x - 10,\ YZ = 13$ ، فأوجد قيمة x.

6) **جبر،** أوجد قياس كل زاوية من زوايا شبه المنحرف $EFGH$ إذا كان $m\angle E = 7x$, $m\angle G = 16x - 4$.

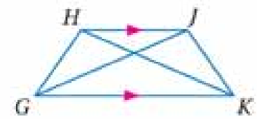
تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
7-10	1
11-12	2
13-16	3
17-20	4

برهان، اكتب برهانًا تسلسليًا لكل سؤال من الأسئلة 7-10.

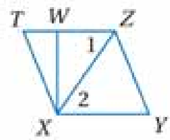
7) **المعطيات،** $\overline{HJ} \parallel \overline{GK}$
$\triangle HGK \cong \triangle JKG,\ \overline{HG} \nparallel \overline{JK}$

المطلوب، إثبات أن الشكل $GHJK$ شبه منحرف متطابق الساقين.



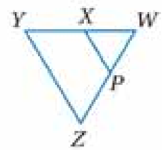
8) **المعطيات،** $\triangle TZX \cong \triangle YXZ$
$\overline{WX} \nparallel \overline{ZY}$

المطلوب، إثبات أن الشكل $XYZW$ شبه منحرف.



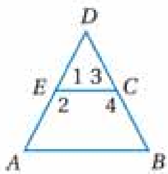
9) **المعطيات،** الشكل $ZYXP$ شبه منحرف متطابق الساقين.

المطلوب، إثبات أن $\triangle PWX$ متطابق الضلعين.



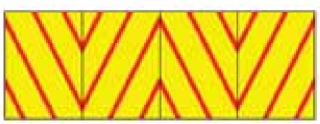
10) **المعطيات،** النقطتان E, C منتصفا $\overline{AD}, \overline{DB}$ و $\overline{AD} \cong \overline{DB},\ \angle A \cong \angle 1$

المطلوب، إثبات أن الشكل $ABCE$ شبه منحرف متطابق الساقين.



11) **رايات،** تمعن في الرايات أدناه، ثم استعمل المسطرة والمنقلة لتحديد إذا كانت أي راية منها تحتوي متوازي أضلاع أو مستطيلًا أو معينًا أو مربعًا أو شبه منحرف.

12) **تصميم داخلي،** تعمل ريم ستارة صغيرة لنافذة المطبخ. واستعملت قطعًا من القماش قطعتها قطريًا لتشكل ستارة كما في الشكل. حدد نوع المضلعات التي تشكلت في الستارة.



هندسة إحداثية، بيّن أن الشكل الرباعي الذي إحداثيات رؤوسه كما في الأسئلة 13-16، شبه منحرف، وحدد هل هو شبه منحرف متطابق الساقين أم لا.

13) $A(-3, 3), B(-4, -1), C(5, -1), D(2, 3)$

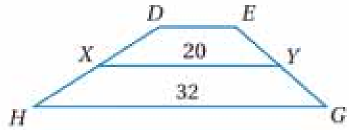
14) $G(-5, -4), H(5, 4), J(0, 5), K(-5, 1)$

15) $C(-1, 1), D(-5, -3), E(-4, -10), F(6, 0)$

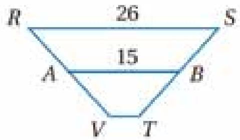
16) $Q(-12, 1), R(-9, 4), S(-4, 3), T(-11, -4)$

جبر: أوجد المطلوب في كل مما يلي:

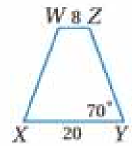
17) في شبه المنحرف $DEGH$ النقطتان X و Y منتصفا ساقيه. أوجد DE.



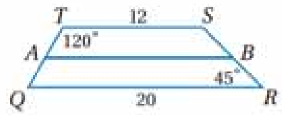
18) في شبه المنحرف $RSTV$ النقطتان A و B، منتصفا ساقيه. أوجد VT.



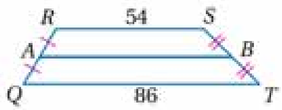
19) في شبه المنحرف المتطابق الساقين $XYZW$. أوجد طول القطعة المتوسطة، $m\angle W$، $m\angle Z$.



20) في شبه المنحرف $QRST$ النقطتان A و B منتصفا ساقيه. أوجد $AB, m\angle Q, m\angle S$.



للسؤالين 21 و 22 استعمل شبه المنحرف $QRST$ المجاور.



21) إذا كانت $\overline{GH}$ القطعة المتوسطة لشبه المنحرف $RSBA$. فأوجد GH.

22) إذا كانت $\overline{JK}$ القطعة المتوسطة لشبه المنحرف $ABTQ$. فأوجد JK.

إنشاءات هندسية: استعمل الفرجار والمسطرة لرسم كل شكل مما يلي:

23) شبه منحرف متطابق الساقين.

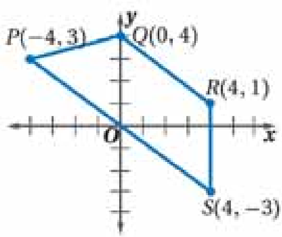
24) شبه منحرف طول قطعته المتوسطة 2 cm.

هندسة إحداثية: حدد إذا كان كل من الشكلين اللذين إحداثيات رؤوسهما كما في السؤالين 25 و26 شبه منحرف، أو متوازي أضلاع، أو مربعًا، أو معيّنًا.

25) $B(1, 2), C(4, 4), D(5, 1), E(2, -1)$

26) $G(-2, 2), H(4, 2), J(6, -1), K(-4, -1)$

هندسة إحداثية: للأسئلة 27 - 29 ارجع إلى الشكل الرباعي $PQRS$ المجاور.



27) حدد ما إذا كان الشكل شبه منحرف أم لا. وإن كان كذلك فهل هو متطابق الساقين؟ وضح إجابتك.

28) هل القطعة المتوسطة محتواة في المستقيم الذي معادلته $y = -\frac{3}{4}x + 1$؟ برّر إجابتك.

29) أوجد طول القطعة المتوسطة

مسائل مهارات التفكير العليا

30) **مسألة مفتوحة:** ارسم شبه منحرف متطابق الساقين، وشبه منحرف غير متطابق الساقين. وارسم القطعة المتوسطة لكل منهما. هل القطعة المتوسطة توازي القاعدتين في الحالتين؟ برر إجابتك.

31) **تحدّ:** اكتب عكس النظرية 5.19، ثم اكتب برهانًا حرًّا له.

32) ما الشكل الذي لا ينتمي للمجموعة التي تحتوي الأشكال الثلاثة الأخرى؟

33) **اكتب:** اذكر خصائص شبه المنحرف، والحد الأدنى من الشروط ليكون الشكل الرباعي شبه منحرف.

تدريب على اختبار معياري

34) أي شكل يمكن أن يكون مثالًا مضادًا للاستنتاج التالي؟

إذا كان قطرا شكل رباعي متطابقين فإن الشكل مستطيل.

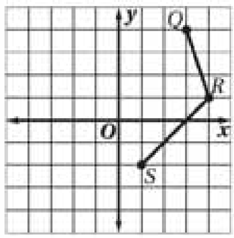
A المربع

B المعيّن

C متوازي الأضلاع

D شبه المنحرف متطابق الساقين

35) **مراجعة:** يبين الشكل التالي جزءًا من شبه المنحرف $QRST$ المتطابق الساقين.



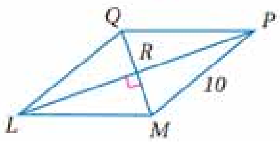
ما إحداثيات النقطة T التي تجعل $\overline{SR} \parallel \overline{TQ}$ وليكتمل شبه المنحرف $QRST$؟

A $(0, 1)$ C $(-2, -1)$

B $(-1, 0)$ D $(-2, 0)$

مراجعة تراكمية

جبر: في المعيّن $LMPQ$، $m\angle QLM = 2x^2 - 10,\ m\angle QPM = 8x,\ MP = 10$ أوجد كلًّا مما يلي: (الدرس 5-5)



36) $m\angle LPQ$

37) QL

38) $m\angle LQP$

39) $m\angle LQM$

هندسة إحداثية: للأسئلة 42-40 ارجع للشكل الرباعي $RSTV$ الذي إحداثيات رؤوسه هي $R(-7, -3), S(0, 4), T(3, 1), V(-4, -7)$. (الدرس 5-4)

40) أوجد RS و TV.

41) أوجد إحداثيات منتصفي $\overline{RT}$ و $\overline{SV}$.

42) هل الشكل $RSTV$ مستطيل؟ برر إجابتك.

43) **حجاج:** يبين الجدول إلى اليسار عدد الحجاج إلى بيت الله الحرام في عامين. ما معدل الزيادة السنوية في عددهم؟ (الدرس 3-2)

السنة	1422هـ	1424هـ
عدد الحجاج	1944760	2120054

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: أوجد ميل كل قطعة مستقيمة فيما يلي إذا كانت إحداثيات طرفيها كما هو مبين: (الدرس 3-2)

44) $(0, a), (-a, 2a)$

45) $(-a, b), (a, b)$

46) $(c, c), (c, d)$

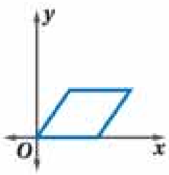
5-7 البرهان الإحداثي والأشكال الرباعية
Coordinate Proof with Quadrilaterals

الأفكار الرئيسة

- أرسم وأسمي الأشكال الرباعية في المستوى الإحداثي لاستعمالها في البرهان الإحداثي.
- أثبت النظريات باستعمال البرهان الإحداثي.

استعد

تعلمت في دراستك للفصل الدراسي الأول كيف تعين رؤوس مثلث بإحداثيات تحوي متغيرات. وقد استعملت قانون المسافة وقانون نقطة المنتصف والبرهان الإحداثي لإثبات النظريات المتعلقة بالمثلثات. والشيء نفسه يمكن عمله مع الأشكال الرباعية.



رسم الأشكال: الخطوة الأولى لاستعمال البرهان الإحداثي هي رسم الشكل في المستوى الإحداثي. واختيار الرسم المناسب للشكل يجعل البرهان سهلاً.

إرشادات

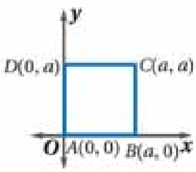
مراجعة

لمراجعة رسم الأشكال في المستوى الإحداثي انظر الدرس 7-3.

مثال

رسم مربع

1 **ارسم وسمِّ مربعًا طول ضلعه a وحدة في المستوى الإحداثي.**

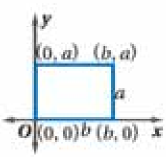


- لتكن A, B, C, D رؤوس مربع طول ضلعه a وحدة.
- ارسم المربع بحيث يكون الرأس A عند نقطة الأصل، والضلع $\overline{AB}$ منطبقًا على الجزء الموجب لمحور السينات، والضلع $\overline{AD}$ منطبقًا على الجزء الموجب لمحور الصادات ثم عين الرأس C.
- الإحداثي الصادي للرأس B يساوي صفرًا؛ لأنه يقع على محور السينات، وبما أن طول الضلع يساوي a، فإن الإحداثي السيني للرأس B يساوي a.
- الرأس D يقع على محور الصادات لذلك فإن الإحداثي السيني له يساوي صفرًا والإحداثي الصادي له يساوي $0 + a = a$.
- الإحداثي السيني للرأس C يساوي a أيضًا وكذلك الإحداثي الصادي له يساوي $0 + a = a$؛ لأن طول الضلع $\overline{BC}$ يساوي a وحدة.

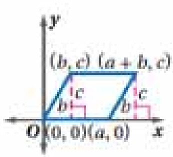
تحقق من فهمك

1) ارسم وسمِّ مستطيلًا في المستوى الإحداثي وليكن طوله $2a$ وحدة وعرضه a وحدة.

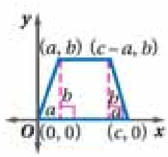
فيما يلي بعض الأمثلة لأشكال رباعية مرسومة في المستوى الإحداثي. لاحظ كيف رسمت هذه الأشكال بحيث تكون إحداثيات رؤوسها أبسط ما يمكن.



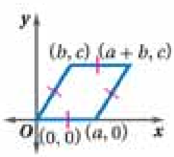
مستطيل



متوازي أضلاع

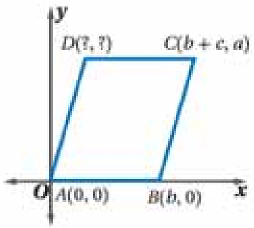


شبه منحرف متطابق الساقين



معيَّن

مثـــال — إيجاد الإحداثيات المجهولة



2 **في الشكل المجاور أوجد الإحداثيات المجهولة لمتوازي الأضلاع.**

الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة ومتوازية.

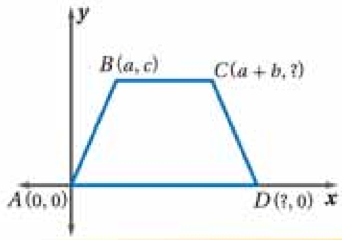
لذلك فالإحداثي الصادي للرأس D يساوي a.

طول $\overline{AB}$ يساوي b، وطول $\overline{DC}$ يساوي b.

لذلك، فالإحداثي السيني للرأس D يساوي $c = (b + c) - b$.

إذن فإحداثيات الرأس D هي (c, a).

تحقق من فهمك

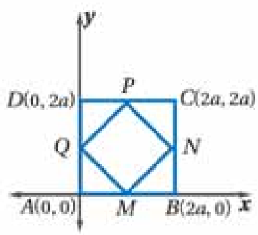


2) في الشكل المجاور أوجد الإحداثيات المجهولة لشبه المنحرف المتطابق الساقين.

برهان النظريات: عندما يرسم الشكل في المستوى الإحداثي يمكننا برهان النظريات باستعمال قانون الميل، وقانون نقطة المنتصف، وقانون المسافة.

مثـــال — برهان إحداثي

3 **ارسم مربعًا في المستوى الإحداثي. عين نقاط منتصفات الأضلاع وسمّها M, N, P, Q. اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن $MNPQ$ مربع.**



الخطوة الأولى هي رسم مربع في المستوى الإحداثي. وتحديد رؤوسه لجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

المعطيات: $ABCD$ مربع. والنقاط M, N, P, Q هي منتصفات أضلاعه.

المطلوب: إثبات أن $MNPQ$ مربع.

البرهان الإحداثي:

من قانون نقطة المنتصف تكون إحداثيات النقط M, N, P, Q كما يلي:

$$M\left(\frac{2a+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (a, 0)$$

$$N\left(\frac{2a+2a}{2}, \frac{2a+0}{2}\right) = (2a, a)$$

$$P\left(\frac{0+2a}{2}, \frac{2a+2a}{2}\right) = (a, 2a)$$

$$Q\left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+2a}{2}\right) = (0, a)$$

أوجد ميل كل من $\overline{QP}, \overline{MN}, \overline{QM}, \overline{PN}$.

ميل $\overline{QP} = \frac{2a-a}{a-0} = 1$

ميل $\overline{MN} = \frac{a-0}{2a-a} = 1$

ميل $\overline{QM} = \frac{0-a}{a-0} = -1$

ميل $\overline{PN} = \frac{a-2a}{2a-a} = -1$

لاحظ أن كل ضلعين متقابلين لهما الميل نفسه، لذلك فهما متوازيان. وكل ضلعين متتابعين متعامدان لأن حاصل ضرب ميليهما يساوي -1

استعمل قانون المسافة لإيجاد طول كل من $\overline{QM}$ و $\overline{QP}$.

$$QM = \sqrt{(0-a)^2 + (a-0)^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

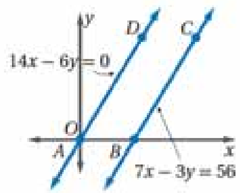
$$QP = \sqrt{(0-a)^2 + (a-2a)^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

إذن، فالشكل $MNPQ$ مربع؛ لأن كل ضلعين متقابلين متوازيان، وكل ضلعين متتابعين متطابقان ومتعامدان.

تحقق من فهمك

3) اكتب برهانًا إحداثيًا للجملة: "إذا كان ضلعان متقابلان في شكل رباعي متوازيين ومتطابقين فإن الشكل متوازي أضلاع".

مثال من واقع الحياة — خصائص الأشكال الرباعية



4 **مواقف السيارات** اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ حيث يمثلان حدي موقف سيارة.

المعطيات: $14x - 6y = 0;\ 7x - 3y = 56$

المطلوب: إثبات أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

البرهان: أعد كتابة المعادلتين بصيغة الميل - المقطع.

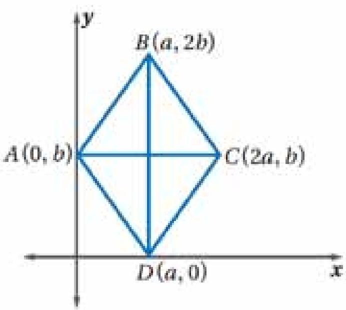
$$7x - 3y = 56 \qquad\qquad 14x - 6y = 0$$

$$\frac{-3y}{-3} = \frac{-7x + 56}{-3} \qquad\qquad \frac{-6y}{-6} = \frac{-14x}{-6}$$

$$y = \frac{7}{3}x - \frac{56}{3} \qquad\qquad y = \frac{7}{3}x$$

بما أن $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ لهما الميل نفسه فإنهما متوازيتان.

تحقق من فهمك



4) اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن القضيبين المتقاطعين لنافذة على شكل معيّن متعامدان.

تأكد

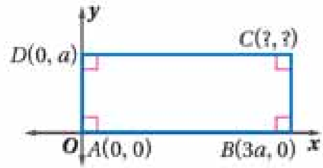
مثال 1 (ص 55)

1) ارسم وسمِّ مستطيلًا طوله a وحدة وعرضه $a + b$ وحدة في المستوى الإحداثي.

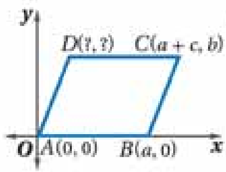
أوجد الإحداثيات المجهولة لكل شكل رباعي في ما يلي:

مثال 2 (ص 56)

2)



3)



اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل جملة مما يلي:

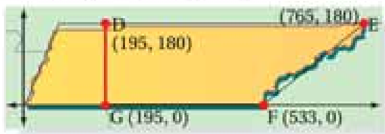
مثال 3 (ص 56)

4) قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

5) قطرا المربع متعامدان.

مثال 4 (ص 57)

6) **قطعة أرض:** في الشكل أدناه قطعة أرض يمكن تجزئتها إلى جزأين يشبهان الأشكال الرباعية. اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن $DEFG$ شبه منحرف. (جميع القياسات مقربة ومعطاة بالأمتار).



تمارين ومسائل

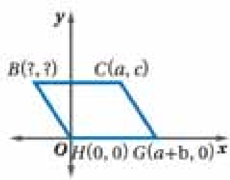
ارسم وسمِّ كلًّا من الشكلين الرباعيين التاليين في المستوى الإحداثي.

7) شبه منحرف متطابق الساقين ارتفاعه c وحدة وطولا قاعدتيه هما: a وحدة، $a + 2b$ وحدة.

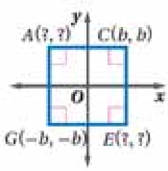
8) متوازي أضلاع طول أحد أضلاعه c وحدة وارتفاعه b وحدة.

أوجد الإحداثيات المجهولة لكل من متوازي الأضلاع أو شبه المنحرف فيما يلي.

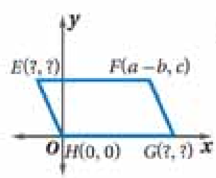
9)



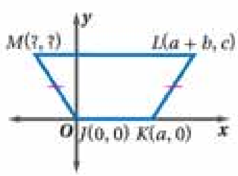
10)



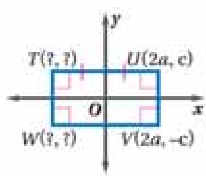
11)



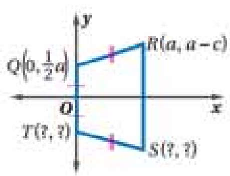
12)



13)



14)



إرشادات للتمارين

للأسئلة	انظر الأمثلة
7, 8	1
9-14	2
15-20	3
21-23	4

الربط مع الحياة

يزداد برج بيزا المائل غوصًا في الأرض. وفي عام 1838 حفر حول أساساته للكشف على قواعد الأعمدة.

ارسم وسمِّ كل شكل في المستوى الإحداثي، ثم اكتب برهانًا إحداثيًا لكل مما يلي:

15) قطرا المستطيل متطابقان.

16) إذا تطابق قطرا متوازي أضلاع فإنه مستطيل.

17) قطرا شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقان.

18) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف متطابق الساقين توازي كلًّا من القاعدتين.

19) القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع مستطيل تشكل معيّنًا.

20) القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع شكل رباعي تشكل متوازي أضلاع.

عمارة: **للأسئلة 21-23، استعمل المعلومات التالية:**

يبلغ طول برج بيزا المائل حوالي 60m. ويميل البرج حوالي $5.5°$، لذلك فالمسقط الرأسي للركن الأيمن العلوي يبعد عن الركن الأيمن السفلي مسافة 4.5 m .

21) ارسم وسمِّ البرج في المستوى الإحداثي.

22) هل من الممكن أن تكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن الأضلاع التي تمثل البرج متوازية؟ وضح إجابتك.

23) من المعلومات المعطاة، ماذا يمكنك أن تستنتج؟

مسائل مهارات التفكير العليا

24) **تبرير:** اشرح كيف ترسم شكلًا رباعيًا في المستوى الإحداثي لتبسيط خطوات البرهان.

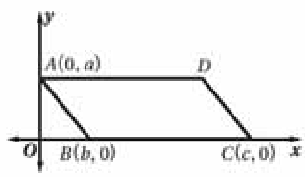
25) **مسألة مفتوحة:** ارسم وسمِّ شبه منحرف بحيث يقع اثنان من رؤوسه على محور الصادات.

26) **تحدٍ:** ارسم وسمِّ شبه منحرف غير متطابق الساقين في المستوى الإحداثي، ثم اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات النظرية 5.20.

27) **اكتب:** وضح كيف يمكن أن يستعمل المستوى الإحداثي في البراهين. ضمِّن إجابتك إرشادات لرسم شكل في المستوى الإحداثي.

تدريب على اختبار معياري

28) في الشكل أدناه، $ABCD$ متوازي أضلاع. ما إحداثيات النقطة D؟



A $(a, c+b)$

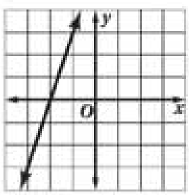
B $(c+b, a)$

C $(b-c, a)$

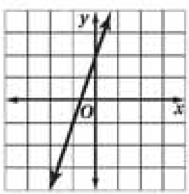
D $(c-b, a)$

29) **مراجعة:** أي التمثيلات البيانية الآتية تمثّل المعادلة $-3x + y = -2$؟

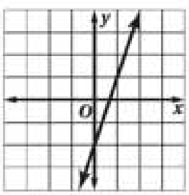
A



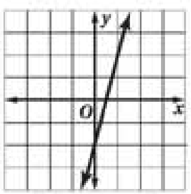
B



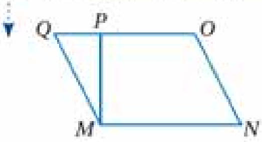
C



D



مراجعة تراكمية

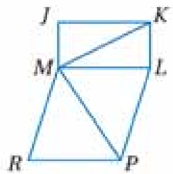


30) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 5-6)

المعطيات: $MNOP$ شبه منحرف قاعدتاه $\overline{MN}, \overline{OP}$، $\overline{MN} \cong \overline{QO}$

المطلوب: إثبات أن الشكل $MNOQ$ متوازي أضلاع.

إذا كان الشكل $JKLM$ مستطيلًا، والشكل $MLPR$ معيّنًا، وكان $\angle JMK \cong \angle RMP, m\angle JMK = 55 , m\angle MRP = 70$. فأوجد ما يلي: (الدرس 5-5)

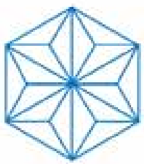


31) $m\angle MPR$.

32) $m\angle KML$.

33) $m\angle KLP$.

34) هندسة إحداثية: إذا كانت إحداثيات رؤوس $\triangle STU$ هي $S(0, 5), T(0, 0), U(-2, 0)$ وإحداثيات رؤوس $\triangle XYZ$ هي $X(4, 8), Y(4, 3), Z(6, 3)$، فبيّن أنّ $\triangle STU \cong \triangle XYZ$. (الدرس 3-4)

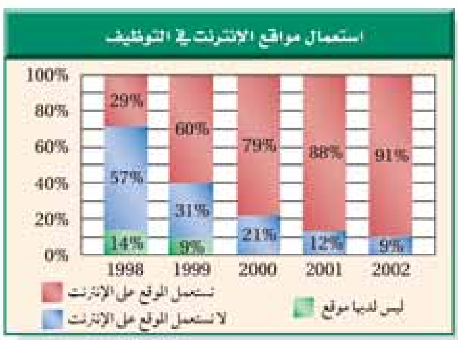


عمارة: للسؤالين 35, 36، استعمل المعلومة التالية:

يبين الشكل إلى اليسار البنية الأساسية لبناية لتوفير الطاقة طورها أحد العلماء عام 1940. (الدرس 3-1)

35) كم مثلثًا متطابق الأضلاع في الشكل؟

36) كم مثلثًا منفرج الزاوية في الشكل؟



أعمال: للأسئلة 37-39، ارجع إلى التمثيل بالأعمدة إلى اليسار. (الدرس 2-3)

37) كم كان معدل التغير للشركات التي لا تستعمل موقعها لتوظيف عاملين جدد بين العامين 1998 و 2002؟

38) كم كان معدل التغير للشركات التي تستعمل موقعها لتوظيف عاملين جدد بين العامين 1998 و 2002؟

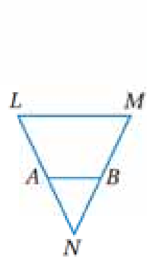
39) تنبأ بالسنة التي تستعمل فيها جميع الشركات مواقع لها على الإنترنت لتوظيف العاملين. برر إجابتك.

40) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 1-7)

المعطيات: $NL = NM$.

$AL = BM$

المطلوب: إثبات أن $NA = NB$



الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

المطويات منظم أفكار — استعد

تأكد أنك دوّنت المفاهيم الأساسية في مطويتك.

مفاهيم أساسية

زوايا المضلعات (الدرس 5-1)

- مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع يعطى بالعلاقة $S = 180(n - 2)$. حيث n يمثل عدد الأضلاع
- مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع محدب 360.

خصائص متوازي الأضلاع (الدرس 5-2)

- الأضلاع المتقابلة متطابقة ومتوازية.
- الزوايا المتقابلة متطابقة.
- الزوايا المتحالفة متكاملة.
- إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.
- القطران ينصف كل منهما الآخر.

تمييز متوازي الأضلاع (الدرس 5-3)

- إذا توافرت في شكل رباعي خصائص متوازي الأضلاع فإنه متوازي أضلاع.

خصائص المستطيل والمعيَّن والمربع وشبه المنحرف (الدروس 5-4 إلى 5-6)

- للمستطيل جميع خصائص متوازي الأضلاع، والقطران متطابقان وينصف كل منهما الآخر، وجميع زواياه قوائم.
- للمعيَّن جميع خصائص متوازي الأضلاع، وجميع أضلاعه متطابقة، وقطراه متعامدان، وينصفان زواياه.
- للمربع جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعيَّن.
- في شبه المنحرف متطابق الساقين، زاويتا كل قاعدة متطابقتان وقطراه متطابقان.

المفردات الأساسية

- القطر (ص 10)
- متوازي الأضلاع (ص 17)
- المستطيل (ص 32)
- المعيَّن (ص 40)
- المربع (ص 40)
- شكل الطائرة الورقية (ص 47)
- شبه المنحرف المتطابق الساقين (ص 48)
- شبه المنحرف (ص 48)
- القطعة المتوسطة (ص 50)

اختبر مفرداتك

بين إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل الكلمة التي تحتها خط لتصبح الجملة صحيحة.

1) قطرا <u>المعيَّن</u> متعامدان.

2) <u>لشبه المنحرف</u> جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعيَّن.

3) إذا كان متوازي الأضلاع <u>معيَّنًا</u> فإن قطريه متطابقان.

4) كل <u>متوازي أضلاع</u> شكل رباعي.

5) <u>المعيَّن</u> هو شكل رباعي فيه فقط ضلعان متقابلان متوازيان.

6) كل قطر من قطري <u>المستطيل</u> ينصف زاويتين متقابلتين من زواياه.

7) إذا كان الشكل الرباعي معيَّنًا ومستطيلًا فإنه <u>مربع</u>.

8) زاويتا إحدى قاعدتي <u>شبه المنحرف المتطابق الساقين</u> متطابقتان.

9) جميع <u>المربعات</u> مستطيلات.

10) إذا وجد في الشكل الرباعي ضلعان متوازيان ومتطابقان فإنه يكون معينًا.

الفصل 5

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

5-1 زوايا المضلعات (الصفحات 15 - 10)

11) أثاث، الطاولة الظاهرة في الصورة أدناه عُمِلت على شكل مضلع منتظم قياس زاويته الداخلية 135. أوجد عدد أضلاعه.

مثال 1، أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية، وقياس كل زاوية داخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 10.

$S = 180(n-2)$ نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية

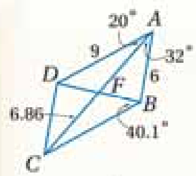
$= 180(10-2)$ $n = 10$

$= 180(8) = 1440$ بالتبسيط

إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية 1440. وقياس كل زاوية داخلية يساوي $1440 \div 10 = 144$.

5-2 متوازي الأضلاع (الصفحات 22–17)

استعمل $\square ABCD$ لإيجاد كلًّا مما يلي:



12) $m\angle BCD$

13) AF

14) $m\angle BDC$

15) BC

16) فن، إحدى الطرائق لرسم مكعب هي أن ترسم ثلاثة أشكال من متوازي الأضلاع. اذكر أي خصائص لمتوازي الأضلاع يجب أن يستعملها الفنان لرسم المكعب.

مثال 2، $WXYZ$ متوازي أضلاع. أوجد $m\angle YZW$ و $m\angle XWZ$.

$$m\angle YZW = m\angle WXY$$
$$= 82 + 33 = 115$$
$$m\angle XWZ + m\angle WXY = 180$$
$$m\angle XWZ + (82 + 33) = 180$$
$$m\angle XWZ + 115 = 180$$
$$m\angle XWZ = 65$$

5-3 تمييز متوازي الأضلاع (الصفحات 31–25)

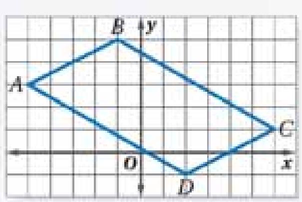
حدد إذا كان الشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يلي متوازي أضلاع أم لا. استعمل الطريقة المشار إليها.

17) $A(-2, 5), B(4, 4), C(6, -3), D(-1, -2)$ قانون المسافة

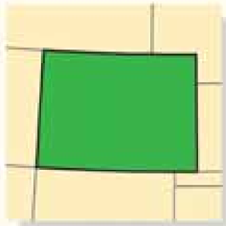
18) $H(0, 4), J(-4, 6), K(5, 6), L(9, 4)$، قانون نقطة المنتصف.

19) $S(-2, -1), T(2, 5), V(-10, 13), W(-14, 7)$، قانون الميل.

مثال 3، حدد إذا كان الشكل أدناه متوازي أضلاع أم لا. استعمل قانوني المسافة والميل.



20) **جغرافيا:** الشكل أدناه يمثل تقريبًا حدود منطقة ما. صف كيف يمكنك التأكد من أن هذا الشكل متوازي أضلاع.



$$AB = \sqrt{[-5-(-1)]^2 + (3-5)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$CD = \sqrt{(6-2)^2 + [1-(-1)]^2}$$
$$= \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

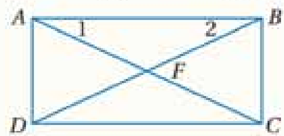
ميل $\overline{AB}$ $= \dfrac{5-3}{-1-(-5)} = \dfrac{1}{2}$

ميل $\overline{CD}$ $= \dfrac{-1-1}{2-6} = \dfrac{1}{2}$

وبما أن الضلعين المتقابلين متطابقان ومتوازيان فإن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع.

5-4 المستطيل (الصفحات 32-38)

21) إذا كان $m\angle 1 = 12x + 4,\ m\angle 2 = 16x - 12$ في المستطيل $ABCD$، فأوجد $m\angle 2$.



22) **لحف:** تعمل مريم لحافًا. فإذا قطعت قطعًا مستطيلة من أقمشة مختلفة. فكيف يمكنها التأكد من أن كل واحدة من قطعها مستطيلة الشكل بالفعل على الرغم من أنها لا تملك منقلة؟

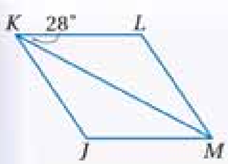
مثال 4: ارجع إلى المستطيل $ABCD$. إذا كان $CF = 4x + 1$ و $DF = x + 13$، فأوجد قيمة x.

$\overline{CF} \cong \overline{DF}$	القطران ينصف كل منهما الآخر وهما متطابقان.
$CF = DF$	تعريف القطع المتطابقة
$4x + 1 = x + 13$	بالتعويض
$3x + 1 = 13$	بطرح x من الطرفين.
$3x = 12$	بطرح 1 من الطرفين.
$x = 4$	بقسمة الطرفين على 3.

5-5 المعيّن والمربع (الصفحات 40-46)

23) **إشارات المرور:** إشارة المرور هذه على شكل متوازي أضلاع. حدد إن كانت مربعًا أيضًا أم لا.

مثال 5: أوجد $m\angle JMK$ في المعيّن المجاور.



بما أن الأضلاع المتقابلة للمعيّن متوازية، فإن $\overline{KL} \parallel \overline{JM}$.

وكذلك $\angle JMK \cong \angle LKM$

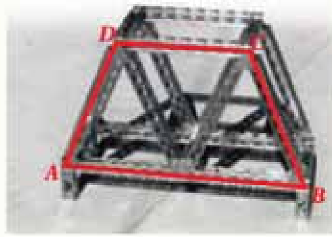
حسب نظرية الزاويتين الداخليتين المتبادلتين، وبالتعويض نجد أن $m\angle JMK = 28$.

الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

5-6 شبه المنحرف (الصفحات 48-54)

24) إذا علمت أن $\overline{XY}$ قطعة متوسطة في شبه المنحرف $JKLM$. فأوجد قيمة a إذا كان $JK = 28, XY = 4a - 4.5, ML = 3a - 2$.

25) كيف يمكنك التأكد من أن الشكل $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين؟



مثال 6 $\overline{MN}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $RSTV$. أوجد قيمة x إذا كان $MN = 60$، $ST = 4x - 1, RV = 6x + 11$.

$MN = \frac{1}{2}(ST + RV)$ قانون القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

$60 = \frac{1}{2}[(4x - 1) + (6x + 11)]$ بالتعويض

$120 = 4x - 1 + 6x + 11$ بضرب الطرفين في 2

$120 = 10x + 10$ بالتبسيط

$110 = 10x$ بطرح 10 من الطرفين

$11 = x$ بقسمة الطرفين على 10

5-7 البرهان الإحداثي والأشكال الرباعية (الصفحات 55-60)

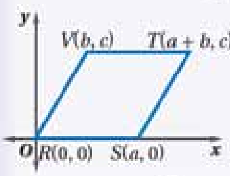
للسؤالين 26 و27 ارسم وسمِّ كل شكل في المستوى الإحداثي، ثم اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل مما يلي:

26) قطرا المربع متعامدان.

27) قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

28) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن الشكل $WXYZ$ مستطيل.

مثال 7 اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن كل ضلعين متقابلين للمعيّن $RSTV$ متوازيان.



المعطيات: $RSTV$ معيّن

المطلوب: إثبات أن $\overline{RV} \parallel \overline{ST}, \overline{RS} \parallel \overline{VT}$

البرهان الإحداثي:

ميل $\overline{RV}$ $= \frac{c - 0}{b - 0} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{RS}$ $= \frac{0 - 0}{a - 0} = 0$

ميل $\overline{ST}$ $= \frac{c - 0}{(a + b) - a} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{VT}$ $= \frac{c - c}{(a + b) - b} = 0$

وبما أن ميلي $\overline{RV}$ و $\overline{ST}$ متساويان فإن $\overline{RV} \parallel \overline{ST}$، وبما أن ميلي $\overline{RS}$ و $\overline{VT}$ متساويان أيضًا فإن $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$.

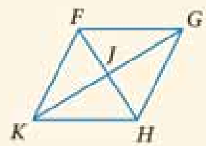
5 اختبار الفصل

1) ما قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 10؟

2) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية للتساعي المنتظم.

3) إذا علمت أن قياس كل زاوية داخلية لمضلع منتظم $162°$. فما عدد أضلاعه؟

أكمل كلًّا مما يلي باستعمال الشكل الرباعي *FGHK*. وبرر إجابتك.



4) $\overline{HK} \cong$ __?__

5) $\angle FKH \cong$ __?__

6) $\angle FKJ \cong$ __?__

7) $\overline{GH} \parallel$ __?__

حدد إذا كان الشكل المعطاة رؤوسه في كل من الأسئلة 11-8 متوازي أضلاع أم لا. وبرر إجابتك.

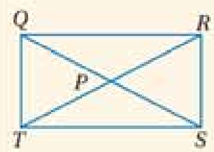
8) $A(4, 3), B(6, 0), C(4, -8), D(2, -5)$

9) $S(-2, 6), T(2, 11), V(3, 8), W(-1, 3)$

10) $F(7, -3), G(4, -2), H(6, 4), J(12, 2)$

11) $W(-4, 2), X(-3, 6), Y(2, 7), Z(1, 3)$

جبر: الشكل ***QRST*** مستطيل.



12) إذا كان $QP = 3x + 11$، $PS = 4x + 8$، فأوجد QS.

13) إذا كان $m\angle QTR = 2x^2 + 7$، $m\angle SRT = x^2 + 18$، فأوجد $m\angle QTR$.

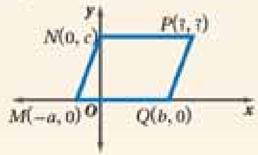
هندسة إحداثية: حدد إذا كان متوازي الأضلاع ***ABCD*** معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. برر إجابتك.

14) $A(12, 0), B(6, -6), C(0, 0), D(6, 6)$

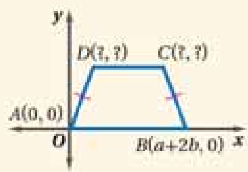
15) $A(-2, 4), B(5, 6), C(12, 4), D(5, 2)$

أوجد الإحداثيات المجهولة لكل متوازي أضلاع أو شبه منحرف.

16)

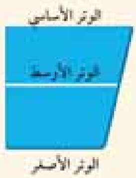


17)



18) ارسم وسمِّ شبه منحرف متطابق الساقين في المستوى الإحداثي، ثم اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطعة المتوسطة توازي كلًّا من القاعدتين.

19) **إبحار:** كثير من قوارب الإبحار لها في أسفلها قطعة حديد طولية لتحفظ القارب متزنًا عند اشتداد الرياح. قطعة الحديد هذه لها شكل شبه المنحرف المجاور وأعلاها وأسفلها متوازيان. وإذا كان طول الوتر الأساسي 9.8 ft وطول الوتر الأصغر 7.4 ft، فأوجد طول الوتر الأوسط.



20) **اختيار من متعدد:** إذا كان قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم **108**. فما هو هذا المضلع؟

A ثماني
B سداسي
C خماسي
D مثلث

الفصل

5

اختبار معياري تراكمي

الفصول 5-1

أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

1) أي شكل يمكن أن يكون مثالًا مضادًّا للاستنتاج التالي؟

> إذا كانت جميع زوايا شكل رباعي قوائم فإن الشكل الرباعي مربع.

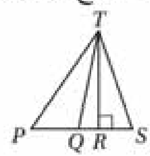
A متوازي الأضلاع

B المستطيل

C المعيّن

D شبه المنحرف

2) في الشكل أدناه، $\overline{TR}$ ارتفاع للمثلث $\triangle PST$.

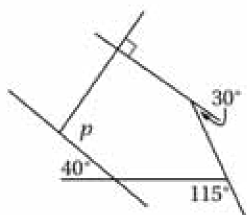


إذا فرضنا أن $\overline{TQ}$ هي أقصر قطعة مستقيمة من T إلى $\overline{PS}$، فإن هذا يعني أن $\overline{TQ}$ ارتفاع لـ $\triangle PST$. وحيث إن $\triangle PST$ له ارتفاع واحد فقط من الرأس T، فإن ذلك يناقض المعطى. ما النتيجة التي يمكن الخروج بها من هذا التناقض؟

A $TQ > TP$ **C** $TQ > TR$

B $TQ < TP$ **D** $TQ < TR$

3) أوجد $m\angle p$ بالدرجات؟



4) **جبر:** إذا كان ناتج طرح x من x^2 يساوي 56. فأي مما يأتي يمثل قيمةً لـ x؟

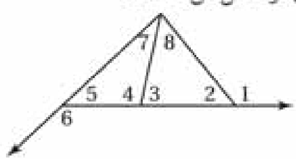
A -8

B -7

C 16

D 56

5) أي البدائل الآتية تشمل جميع الزوايا التي قياس كل منها يجب أن يكون أقل من $m\angle 6$؟



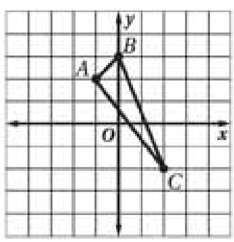
A $\angle 1, \angle 2, \angle 4, \angle 7, \angle 8$

B $\angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5$

C $\angle 2, \angle 4, \angle 6, \angle 7, \angle 8$

D $\angle 2, \angle 4, \angle 7, \angle 8$

6) **شبكات:** إذا كان المثلث ABC يطابق $\triangle HIJ$، فكم طول الضلع $\overline{HJ}$؟

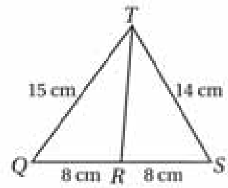


إرشادات للاختبار

سؤال 6 تذكر أن قانون المسافة بين نقطتين هو:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

7) أي مسلّمة أو نظرية يمكن استعمالها لإثبات أن قياس $\angle QRT$ أكبر من قياس $\angle SRT$؟



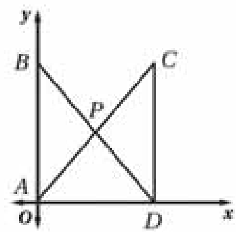
A المتباينة AAS

B المتباينة ASA

C المتباينة SAS

D المتباينة SSS

8) أي جملة أو جمل تثبت أن $\triangle ABP \cong \triangle CDP$؟



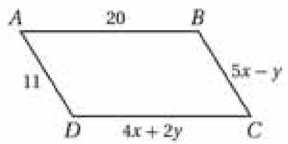
A ميل $\overline{AB}$ = ميل $\overline{CD}$، والمسافة من A إلى C تساوي المسافة من B إلى D

B حاصل ضرب ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ يساوي -1 ، والمسافة من A إلى C تساوي المسافة من B إلى D

C ميل $\overline{AB}$ = ميل $\overline{CD}$، والمسافة من B إلى P تساوي المسافة من D إلى P

D حاصل ضرب ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ يساوي 1، والمسافة من A إلى B تساوي المسافة من D إلى C

9) ما قيم x و y التي تجعل الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع؟



A $x = 4, y = 3$ C $x = 3, y = 4$

B $x = \frac{31}{9}, y = \frac{11}{9}$ D $x = \frac{11}{9}, y = \frac{31}{9}$

10) ما عكس العبارة "إذا كان الشكل مربعًا فإنه مستطيل"؟

A إذا لم يكن الشكل مستطيلًا فإنه ليس مربعًا.

B إذا لم إذا لم يكن الشكل مربعًا فإنه ليس مستطيلًا.

C إذا كان الشكل مستطيلًا فإنه مربع.

D إذا كان الشكل مستطيلًا فإنه ليس مربعًا.

سؤال ذو مستوى متقدم

سجل إجابتك على ورقة، وبين خطوات الحل.

11) إذا كانت رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $A(0, 0), B(a, 0), C(a + b, c), D(b, c)$.

a) ارسم $ABCD$ في المستوى الإحداثي وسمّه.

b) أثبت أن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع.

c) إذا كان $a^2 = b^2 + c^2$، فحدد نوع متوازي الأضلاع $ABCD$. برر إجابتك باستعمال الهندسة الإحداثية.

هل تحتاج مساعدة إضافية؟											
إذا لم تجب عن سؤال.....	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
فعد إلى	5-4	4-4	5-1	مهارة سابقة	4-2	3-3	4-5	3-7	5-2	1-3	5-7

الفصل 6

التناسب والتشابه
Proporation and Similarity

الأفكار العامة

- أتعرف المضلعات المتشابهة، وأستعمل النسب والتناسب في حل المسائل.
- أميّز الأجزاء المتناسبة، وأستعمل المحيطات والارتفاعات ومنصفات الزوايا والقطع المستقيمة المتناظرة للمثلثات المتشابهة في حل المسائل.

المفردات

التناسب (ص 71)
proportion

الضرب التبادلي (ص 71)
cross products

المضلعات المتشابهة (ص 78)
similar polygons

مقياس الرسم (ص 79)
scale factor

القطعة المنصّفة (ص 96)
midsegment

الربط مع الحياة

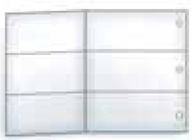
تناسب: يتم تصميم بعض المجسمات الجمالية والدعائية لتوافق أشياء مشهورة مثل هذه العربة بحيث يكون هناك تناسب بين الأطوال في تلك المجسمات ونظيراتها في الشكل الأصلي.

المَطْوِيَاتُ
مُنَظِّمُ أفْكَار

التناسب والتشابه: اعمل المطوية الآتية لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك. ابدأ بورقة قياس A3.

1 **اطوِ** الورقة عرضيًا، واترك هامشًا لعمل ثقوب تمكّنك من تثبيتها في ملفك.

2 **افتح** الورقة وسطرها لتقسمها إلى ستة أقسام متساوية.



3 **اكتب** عنوانًا لكل جزء مستعملاً أرقام الدروس.

4 **اكتب** اسم الفصل على الصفحة الأولى.

التهيئة للفصـــل 6

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي. ارجع إلى «المراجعة السريعة» لمساعدتك في ذلك.

اختبار سريع

حل كلاًّ من المعادلات الآتية: (مهارة سابقة)

1) $\frac{2}{3}y - 4 = 6$

2) $\frac{5}{6} = \frac{x-4}{12}$

3) $\frac{4}{3} = \frac{y+2}{y-1}$

4) $\frac{2y}{4} = \frac{32}{y}$

5) **ركوب الدراجات:** قاد صلاح دراجته مسافة 15km في ساعتين. فكم كيلومترًا يقطع في 5 ساعات إذا قاد دراجته بمعدل السرعة نفسه؟

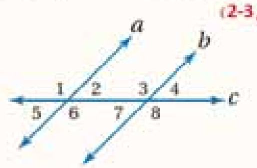
أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين في كل من السؤالين الآتيين: (الدرس 3-2)

6) $(-6, -3)$ و $(2, -3)$

7) $(-3, 4)$ و $(2, -2)$

8) بلغت مخصصات التدريب والابتعاث في ميزانية الدولة 646.5 مليون ريال سنة 1424هـ. وفي سنة 1425هـ بلغت 694.9 مليون ريال. فما معدل التغير في المخصصات؟ (الدرس 3-2)

باستعمال المعلومات الآتية، حدد إذا كان $a \parallel b$ أم لا. واذكر المسلّمة أو النظرية التي تبرر إجابتك في كل من الأسئلة الآتية: 9-12. (الدرس 3-2)



9) $\angle 1 \cong \angle 8$

10) $\angle 3 \cong \angle 6$

11) $\angle 5 \cong \angle 3$

12) $\angle 2 \cong \angle 4$

مراجعة سريعة

مثال 1

حل المعادلة $\frac{5n+2}{n-1} = 2$

$\frac{5n+2}{n-1} = 2$

$(n-1)\left(\frac{5n+2}{n-1}\right) = 2(n-1)$ بالضرب

$5n + 2 = 2n - 2$ بالتبسيط

$3n = -4$ بتجميع الحدود المتشابهة

$n = -\frac{4}{3}$ بقسمة الطرفين على 3

مثال 2

أوجد ميل المستقيم الذي يحوي النقطتين $(-41, 17)$، و $(31, 29)$.

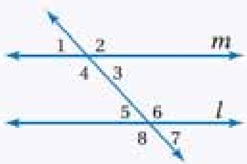
(ميل المستقيم) $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ قانون الميل

$= \frac{29 - 17}{31 - (-41)}$ بالتعويض

$= \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$ بالتبسيط

مثال 3

هل $m \parallel l$ إذا كانت $\angle 6 \cong \angle 4$؟ برر إجابتك.



هاتان الزاويتان داخليتان متبادلتان. وإذا كانت الزاويتان الداخليتان المتبادلتان متطابقتين فإن المستقيمين متوازيان.

6-1 التناسب
Proportion

استعد

النسبة بين عرض شاشات أجهزة التلفاز القياسية وارتفاعها ثابتة. فالنسبة بين عرض شاشة التلفاز إلى ارتفاعها تساوي 4:3 أو $\frac{4}{3}$.

فكرة الدرس

- أكتب نسبًا.
- أستعمل خصائص التناسب.

المفردات

النسبة
ratio
التناسب
proportion
الضرب التبادلي
cross products
الطرفان
extremes
الوسطان
means

كتابة النسب: **النسبة** هي مقارنة بين كميتين باستعمال القسمة. فنسبة a إلى b يمكن أن تكتب بصورة $\frac{a}{b}$، حيث b لا تساوي الصفر. كما يمكن أن تكتب هذه النسبة بصورة $a:b$.

مثال كتابة النسبة

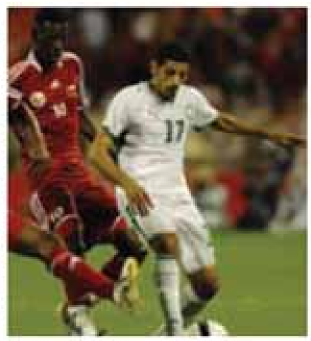
1 **كرة القدم:** لعب أحد أندية الدرجة الأولى في المملكة العربية السعودية 19 مباراة في موسم 1430 / 1429، وكان عدد الأهداف التي سجلها في ذلك الموسم 37 هدفًا. أوجد نسبة الأهداف التي سجلها في كل مباراة مقربة إلى أقرب عدد صحيح.

اقسم عدد الأهداف المسجلة على عدد المباريات التي أقيمت.

$$\left(\frac{\text{عدد الأهداف المسجلة}}{\text{عدد المباريات التي أقيمت}}\right) = \frac{37}{19} \cong \frac{2}{1}$$

تُسمى النسبة التي مقامها 1 نسبة الوحدة.

تعني هذه النسبة أنه تم تسجيل هدفين في كل مباراة تقريبًا.



الربط مع واقع الحياة

تعد كرة القدم الرياضة الأولى في المملكة العربية السعودية من حيث الممارسة والمتابعة، ويحقق أعضاء منتخبها إنجازات عالمية.

تحقق من فهمك

1) نسبة عدد الطلبة (ذكورًا وإناثًا) في المدارس الحكومية لمنطقة الرياض إلى عدد المدارس هي 4500000:20000. اكتب هذه النسبة بصورة نسبة الوحدة.

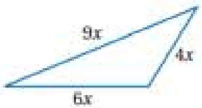
ويمكن أن يوسع مفهوم النسبة فيستعمل للمقارنة بين ثلاثة أعداد أو أكثر. فالتعبير $a:b:c$ يعني أن النسبة بين العددين الأول والثاني هي $a:b$، والنسبة بين العددين الثاني والثالث هي $b:c$، والنسبة بين العددين الأول والثالث هي $a:c$.

مثال: النسب الموسّعة في المثلثات

2 مثلث محيطه يساوي **190cm**، والنسبة بين أطوال أضلاعه هي **4:6:9**. أوجد طول أطول ضلع في المثلث.

استكشف عليك أن تطبق النسبة بين أطوال أضلاع المثلث ومحيطه لإيجاد طول الضلع الأطول.

خطط تذكّر أنه يمكنك أن تجد كسورًا مكافئة لكسر معلوم بضرب بسطه ومقامه في عدد لا يساوي الصفر.



لذلك $\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{x} = \frac{2x}{3x} = 2:3$ ويمكننا أيضًا كتابة 4:6:9 بصورة $4x:6x:9x$ واستعمال تلك القياسات لأضلاع المثلث.

حل

$4x + 6x + 9x = 190$ محيط المثلث

$19x = 190$ بتجميع الحدود المتشابهة.

$x = 10$ بقسمة الطرفين على 19.

أوجد الآن أطوال أضلاع المثلث:

$4x = 4(10) = 40$، $6x = 6(10) = 60$ و $9x = 9(10) = 90$.

إذن، طول أطول ضلع في المثلث يساوي 90cm.

تحقق للتحقق من معقولية النتائج، اجمع أطوال الأضلاع للتأكد من أن المحيط يساوي 190.

$40 + 60 + 90 = 190$ ✓

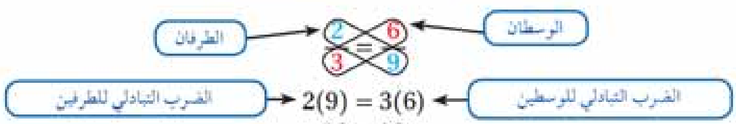
تحقق من فهمك

2) محيط مثلث يساوي **392 in**، والنسبة بين أطوال أضلاعه هي 3:3:8. أوجد طول أطول أضلاعه.

> **إرشادات**
>
> **كتابة معادلات**
>
> يتطلب حل مسائل النسب الموسعة استعمال متغير ليكون عاملاً مشتركاً بين أطراف النسبة. وهذا يمكّنك من كتابة معادلة لحل المسألة.

استعمال خصائص التناسب: تُسمى المعادلة التي تنص على أن نسبتين متساويتان **تناسبًا**. فالكسور المتكافئة تشكّل تناسبًا، ولأن $\frac{2}{3}$ و $\frac{6}{9}$ كسران متكافئان، فإن $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ يعدّ تناسبًا.

ويتضمن كل تناسب **ناتجي ضرب تبادلي**. فناتجا الضرب التبادلي في التناسب $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ هما 2×9 و 6×3. **وطرفا التناسب** هما 2 و 9، **ووسطا التناسب** هما 3 و 6.



$18 = 18$

وفي كل تناسب يكون حاصل ضرب الطرفين مساويًا لحاصل ضرب الوسطين.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $b \neq 0, d \neq 0$

$(bd)\frac{a}{b} = (bd)\frac{c}{d}$ بضرب الطرفين بـ bd

$da = bc$ بالتبسيط.

$ad = bc$ خاصية التبديل

> **لغة الرياضيات**
>
> **التناسب:** عندما يكتب التناسب باستعمال النقطتين فإننا نقرأ النقطتين "إلى" فمثلاً 2:3 يُقرأ "2 إلى 3". ويكون الوسطان هما العددين الداخليين، ويكون الطرفان العددين الخارجيين.
>
> $\overbrace{2:3 = 6:9}^{\text{الطرفان}}$ (الوسطان: 3 و 6)

مفهوم أساسي — صيغة ميل - مقطع للمعادلة الخطية

التعبير اللفظي لكل عددين a و c، ولكل عددين غير صفريين b و d، يكون $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ إذا وفقط إذا كان $ad = bc$.

مثال $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ إذا وفقط إذا كان $4 \cdot 15 = 5 \cdot 12$.

حَلُّ تناسب يعني إيجاد قيمة المتغير التي تجعل التناسب صحيحًا.

مثال 3 حَلُّ تناسبات باستعمال الضرب التبادلي

حل كل تناسب مما يأتي:

a) $\frac{3}{5} = \frac{x}{75}$

$\frac{3}{5} = \frac{x}{75}$ التناسب الأصلي

$3(75) = 5x$ بالضرب التبادلي

$225 = 5x$ بالضرب

$45 = x$ بقسمة الطرفين على 5

b) $\frac{3x-5}{4} = \frac{-13}{2}$

$\frac{3x-5}{4} = \frac{-13}{2}$ التناسب الأصلي

$2(3x-5) = 4(-13)$ بالضرب التبادلي

$6x - 10 = -52$ بالتبسيط

$6x = -42$ بإضافة 10 إلى الطرفين

$x = -7$ بقسمة الطرفين على 6

تحقق من فهمك

3A) $\frac{x}{4} = \frac{11}{-6}$

3B) $\frac{-4}{7} = \frac{6}{2x+5}$

يمكن أن تستعمل التناسبات لحل مسائل تتضمن شيئين متناسبين. وهذا يعني أن النسب التي تقارن قياسات أجزاء أحد الشيئين مع قياسات أجزاء الشيء الآخر تشكّل تناسبات صحيحة دائمًا.

مثال 4 حَلُّ مسائل باستعمال التناسبات

صناعة الطائرات: طائرة طولها 78 m، والمسافة بين طرفي جناحيها 90 m. عُمل نموذج يمثّل هذه الطائرة. فإذا كانت المسافة بين طرفي جناحي النموذج 36 cm، فأوجد طول النموذج.

$$\frac{\text{طول الطائرة (بالأمتار)}}{\text{طول النموذج (بالسنتمترات)}} = \frac{\text{المسافة بين جناحي الطائرة (بالأمتار)}}{\text{المسافة بين جناحي النموذج (بالسنتمترات)}}$$

$\frac{78}{x} = \frac{90}{36}$ بالتعويض

$(78)(36) = x \cdot 90$ الضرب التبادلي

$2808 = 90x$ بالضرب

$31.2 = x$ بقسمة الطرفين على 90

إذن، فطول النموذج يساوي 31.2 cm.

تحقق من فهمك

4) يبيّن مقياس الرسم على خريطة أن كل 1.5 cm يمثل 100 km. فإذا كانت المسافة بين مدينتي حائل ونجران على الخريطة تساوي 23.8 cm، فكم كيلومترًا تبلغ المسافة على الأرض بين المدينتين تقريبًا؟

إرشادات

خطأ شائع

التناسب الوارد في مثال 4 ليس هو التناسب الصحيح الوحيد، بل توجد أربعة تناسبات متكافئة:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$، $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

جميع هذه التناسبات لها نواتج الضرب التبادلي نفسها.

تأكد

مثال 1 (ص 70)

1) **تبديل العملات:** إذا كان كل 105 ريالات سعودية تعادل 19 دينارًا أردنيًا. فما النسبة بين الريال السعودي إلى الدينار الأردني؟

مثال 2 (ص 71)

2) إذا كانت النسبة بين أطوال أضلاع مثلث هي 9:8:7، وكان محيطه 144 وحدة. فأوجد طول كل ضلع من أضلاعه.

3) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث هي 5:7:8، فأوجد قياس كل من زواياه.

مثال 3 (ص 72)

حل كلاً من التناسبات الآتية:

4) $\frac{3}{x} = \frac{21}{6}$ 5) $\frac{2.3}{4} = \frac{x}{3.7}$ 6) $\frac{x-2}{2} = \frac{4}{5}$

مثال 4 (ص 72)

7) **خرائط:** يشير مقياس الرسم على خريطة إلى أن كل 1.5 cm يمثل 200 km. فإذا كانت المسافة بين مدينتي الطائف وجدة على الخريطة تساوي 1.2 cm، فكم تكون المسافة على الأرض بين المدينتين تقريبًا؟

تمارين ومسائل

مساعدة الواجب المنزلي

للأسئلة	انظر الأمثلة
8–11	1
12–17	2
18–25	3
26–29	4

8) في مسح أجري على 1000 مواطن سعودي ممن يقودون السيارات، تبين أن 960 منهم حاصلون على رخصة قيادة السيارات. فما نسبة الحاصلين على الرخصة إلى الذين يقودون السيارات؟

9) **كرة سلة:** في اختبار لاختيار فريق كرة السلة، حصل 30 طالبًا على 15 نقطة. فما نسبة عدد النقاط إلى عدد الطلبة المتنافسين؟

10) **تعليم:** في السنة الدراسية 2009 – 2008، كان عدد الطلبة في جامعة الملك عبد الله للعلوم والتقنية 825، وعدد أعضاء هيئة التدريس 275. فما نسبة الطلبة لكل عضو هيئة تدريس مقربة إلى أقرب شخص؟

11) **تصميم:** صُمّم نموذج بيت بارتفاع 10 in، إلا أن ارتفاعه الحقيقي بلغ 10 ft، فما نسبة ارتفاع نموذج البيت إلى ارتفاعه الحقيقي؟

أوجد أطوال أضلاع كل مثلث فيما يأتي:

12) النسبة بين أطوال أضلاع المثلث هي 8:7:5، ومحيطه 240 ft.

13) النسبة بين أطوال أضلاع المثلث هي 3:4:5، ومحيطه 72 cm.

14) النسبة بين أطوال أضلاع المثلث هي $\frac{1}{6} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$، ومحيطه 31.5 in.

15) النسبة بين أطوال أضلاع المثلث هي $\frac{1}{5} : \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$، ومحيطه 6.2 cm.

أوجد قياسات زوايا كل مثلث مما يأتي:

16) النسبة بين قياسات زوايا المثلث هي 2:5:3.

17) النسبة بين قياسات زوايا المثلث هي 6:9:10.

حل كلاً من التناسبات الآتية:

18) $\frac{3}{8}=\frac{x}{5}$ 19) $\frac{w}{6.4}=\frac{1}{2}$ 20) $\frac{4x}{24}=\frac{56}{112}$ 21) $\frac{11}{20}=\frac{55}{20x}$

22) $\frac{2x-13}{28}=\frac{-4}{7}$ 23) $\frac{4x+3}{12}=\frac{5}{4}$

24) $\frac{b+1}{b-1}=\frac{5}{6}$ 25) $\frac{3x-1}{2}=\frac{-2}{x+2}$

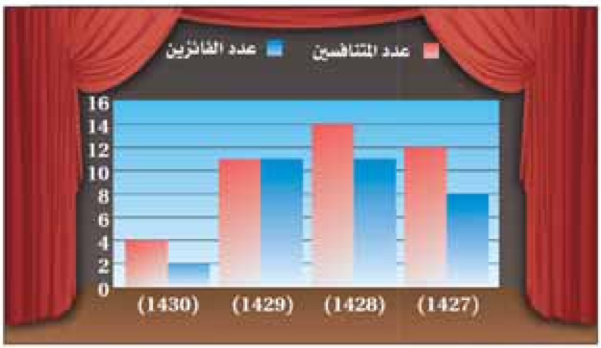
26) استعمل خط الأعداد إلى اليسار، وأوجد نسبة AC إلى BH.

27) سلك طوله 42 ft، قُسم إلى جزأين النسبة بين طوليهما هي 3:4. فما طول كل جزء؟

28) **آثار:** في صورة لمنطقة أثرية ظهر عمود طوله 20 cm. فإذا كان طول العمود الحقيقي يساوي 2.1، فما النسبة بين طول العمود في الصورة إلى طوله الحقيقي؟

الربط مع واقع الحياة: شارك في مسابقة الملك عبدالعزيز الدولية لحفظ القرآن الكريم وتلاوته وتجويده على مدار دوراتها الثلاثين (1429-1399هـ) 4690 متسابقًا فاز منهم 707 متسابق. وكانت الدورة (11) هي أكثر الدورات في أعداد المشاركين (227 متسابقًا).

مسابقات: لحل السؤالين 30 , 29، ارجع إلى التمثيل بالأعمدة الذي يبين عدد الطلبة المتقدمين لمنافسة حفظ القرآن الكريم في إحدى المدارس وعدد الفائزين في تلك المنافسة خلال أربع سنوات.



29) أي السنوات كانت فيها نسبة الفائزين إلى المتنافسين هي النسبة الأكبر؟

30) أي السنوات كانت فيها نسبة الفائزين إلى المتنافسين هي النسبة الأصغر؟

مياه: لحل السؤالين 31 , 32، استعمل المعلومات الآتية:

يبلغ عدد سكان المملكة العربية السعودية 22673538 نسمة حسب إحصاءات عام 1425 . إذا تم استهلاك 4 مليارات لتر من المياه في أحد أسابيع ذلك العام.

31) أوجد معدل استهلاك الفرد للماء مقربًا لأقرب جزء من عشرة .

32) إذا كان عدد سكان منطقة الرياض 5455363 نسمة، فكم عدد لترات الماء المستهلكة في منطقة الرياض في ذلك الأسبوع ؟

الكتاب السنوي: لحل السؤالين 34 , 33، استعمل المعلومات الآتية:

تريد اللجنة المشرفة على إعداد الكتاب السنوي تصغير صورة قياسها $8\,in \times 10\,in$ لتناسب مكانًا في الكتاب السنوي الذي أبعاده $4\,in \times 4\,in$.

33) أوجد أكبر قياسات ممكنة للصورة بعد تصغيرها.

34) ما النسبة المئوية لتصغير طول الصورة؟

المستطيل الذهبي: يستعمل بعض الفنانين المستطيل الذهبي في أعمالهم. ونسبة طول هذا المستطيل إلى عرضه تسمى النسبة الذهبية وتبلغ تقريبًا 1.618.

35) إذا كان بعدا مستطيل 19.42 m و 12.01 m. فهل هذا المستطيل ذهبي؟ ثم أوجد طول قطره.

36) **تلفاز:** نسبة عرض شاشة التلفاز القياسي إلى ارتفاعها 4:3، ونسبة الأبعاد لنوع آخر غير قياسي هي 16:9. قارن هاتين النسبتين بالنسبة الذهبية، مبينًا أي شاشات هذين النوعين تمثل مستطيلاً ذهبيًا؟ برر إجابتك.

37) **بحث:** استعمل الإنترنت أو أية مصادر أخرى لإيجاد أمثلة على مستطيلات ذهبية.

مسائل مهارات التفكير العليا

38) **مسألة مفتوحة:** اكتب تناسبين طرفاهما 5 و 8.

39) **تبرير:** اشرح كيف ستحل التناسب $\frac{21}{x} = \frac{28}{48}$.

40) حدد التناسب الذي لا ينتمي إلى مجموعة التناسبات الأخرى. وبرر إجابتك.

$\frac{7}{9} = \frac{19.6}{25.2}$	$\frac{5}{6} = \frac{14}{16.8}$	$\frac{2}{3} = \frac{5}{7.5}$	$\frac{3}{8} = \frac{8.4}{22.4}$

تحدٍ: إذا كانت النسب بين أطول أضلاع ثلاثة مضلعات معطاة على النحو الآتي، فاعمل تخمينًا حول نوع كل مضلع منها.

41) 2:2:3　　42) 3:3:3:3　　43) 4:5:4:5

تدريب على اختبار معياري

44) يحتوي منتج غذائي على القمح والرز والشوفان بنسبة 2(قمح) :1(رز) :3(شوفان). فإذا عمل صاحب المصنع خليطًا، واستعمل 120 kg من الشوفان. فكم كيلوجرامًا من القمح سيحتاجه؟

A 60　　**C** 120

B 80　　**D** 180

45) **مراجعة:** طول قاعدة مثلث تقل عن مثلي ارتفاعه 6 cm، ومساحة المثلث تساوي $270\,cm^2$ مربعًا. فكم سنتمترًا ارتفاع المثلث؟

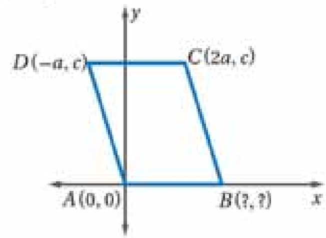
F 12　　**H** 18

G 15　　**J** 21

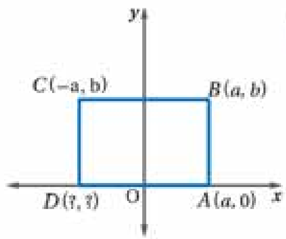
مراجعة تراكمية

اذكر الإحداثيات المجهولة لكل متوازي أضلاع أو مستطيل مما يأتي: (الدرس 7-5)

(46

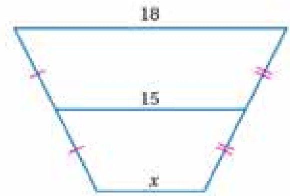


(47

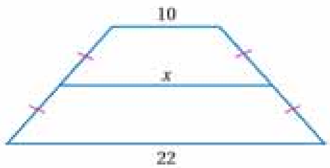


جبر: أوجد القياس المجهول لكل شبه منحرف مما يأتي: (الدرس 6-5)

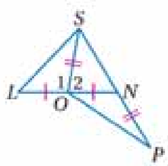
(48



(49



في الشكل أدناه $\overline{SO}$ قطعة متوسطة في $\triangle SLN$، $\overline{OS} \cong \overline{NP}$, $m\angle 1 = 3x - 50$, $m\angle 2 = x + 30$. حدد إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا، أو أحيانًا، أو ليست صحيحة أبدًا: (الدرس 5-4)

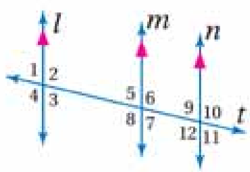


(50 $LS > SN$

(51 $SN < OP$

(52 $x = 45$

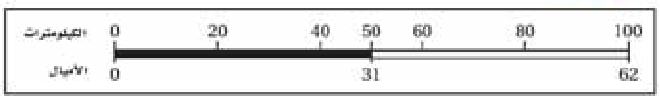
في الشكل إلى اليسار $m\angle 9 = 75$. أوجد قياس كل زاوية مما يأتي: (الدرس 2-2)



(53 $\angle 3$ (54 $\angle 5$ (55 $\angle 6$

(56 $\angle 8$ (57 $\angle 11$ (58 $\angle 12$

(59 **خرائط:** ظهر المقياس الآتي على إحدى الخرائط بحيث كانت الكيلومترات في الأعلى والأميال في الأسفل.



افرض أن $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ قطعتان على هذه الخريطة. فإذا كان $AB = 100\text{ km}$، $CD = 62\text{ mi}$. فهل $\overline{CD} \cong \overline{AB}$؟ برّر إجابتك. (الدرس 7-1)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: أوجد المسافة بين كل نقطتين في الأسئلة الآتية مقرّبة لأقرب عُشر: (مهارة سابقة)

(60 $A(12, 3), B(-8, 3)$

(61 $C(0, 0), D(5, 12)$

(62 $E(\frac{4}{5}, -1), F(2, \frac{-1}{2})$

(63 $G(3, \frac{3}{7}), H(4, -\frac{2}{7})$

توسع
6-1

معمل الحاسبة البيانية

متتابعة فيبوناشي والنسب

عاش ليوناردو بيسانو فيبوناشي في الفترة (1170م – 1250م)، في إيطاليا، وتلقى تعليمه في شمال إفريقيا، ولذلك كانت أعماله مشابهة لأعمال الآخرين في شمال إفريقيا في ذلك الوقت. وقد نشر كتابه Liber abaci في سنة 1202م وقدَّم فيه ما يُسمى الآن متتابعة فيبوناشي، حيث يكون كل حد من حدودها بعد الأول والثاني، مساويًا مجموع الحدين السابقين له.

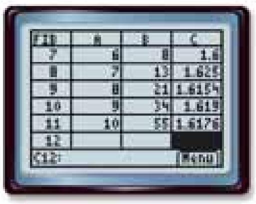
الحدود	1	2	3	4	5	6	7
أعداد فيبوناشي	1	1	2	3	5	8	13
			1+1	1+2	2+3	3+5	5+8

نشاط

يمكنك استعمال CellSheet على الحاسبة البيانية لمعرفة حدود متتابعة فيبوناشي، ومقارنة كل حد بالحدين السابقين له.

الخطوة 1: أدخل إلى تطبيق CellSheet بالضغط على مفتاح APPS اختر العدد لـ CellSheet، واضغط على مفتاح ENTER.

الخطوة 2: أدخل عناوين الأعمدة في الصف 1. مستعملاً مفتاح ALPHA لإدخال الحروف، واضغط ["] في بداية كل عنوان.



الخطوة 3: أدخل 1 في الخلية A2، ثم أدخل الصيغة A2+1 = في الخلية A3. اضغط STO▸ لإدراج = في الصيغة، ثم استعمل F3 لنسخ هذه الصيغة، واستعمل F4 للصقها في كل خلية في العمود.

الخطوة 4: في العمود B نسجل أعداد فيبوناشي. أدخل العدد 1 في الخليتين B2 و B3 ؛ لأنه لا يوجد حدان سابقان لجمعهما، ثم أدخل الصيغة B2+B3= في الخلية B4. وانسخ هذه الصيغة أسفل العمود.

الخطوة 5: في العمود C سنجد نسبة كل حد إلى الحد السابق له. أدخل العدد 1 في الخلية C2 ؛ لأنه لا يوجد حد سابق، ثم أدخل B3 / B2 = في الخلية C3. انسخ هذه الصيغة أسفل العمود. يظهر على الشاشة نتائج الحدود من *1* إلى *10*.

تحليل النتائج

1) ماذا يحصل لعدد فيبوناشي عندما تزداد رتبة الحد؟

2) ما النمط للأعداد الفردية والزوجية التي لاحظتها في متتابعة فيبوناشي؟

3) ما النمط الذي تلاحظه في عمود النسبة كلما ازدادت رتب الحدود؟

4) وسّع الصفحة لحساب أول خمسين حدًّا من متتابعة فيبوناشي. وصِفْ أية اختلافات في الأنماط التي ذكرتها في الأسئلة **3–1**.

5) **خمّن:** كيف ترتبط متتابعة فيبوناشي بالنسبة الذهبية؟

6-2 المضلّعات المتشابهة
Similar Polygons

فكرة الدرس

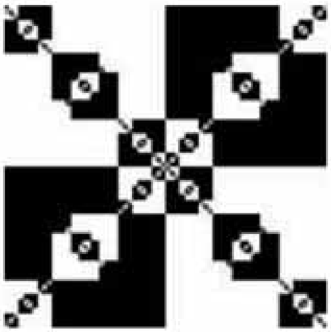
- أحدد المضلعات المتشابهة.
- أحل مسائل تتضمن مقياس الرسم.

المفردات

المضلعات المتشابهة
similar polygons
مقياس الرسم (معامل التشابه)
scale factor

استعد

يستعمل الفنانون في رسومهم أشكالاً متشابهة في الشكل ولكنها مختلفة في الأبعاد. فالصورة إلى اليسار تتضمن أنماطًا هندسية مكررة ومتشابهة.
الأجزاء السوداء متشابهة في شكلها ومختلفة في وضعها وأبعادها، ومثلها الأشكال البيضاء أيضًا.

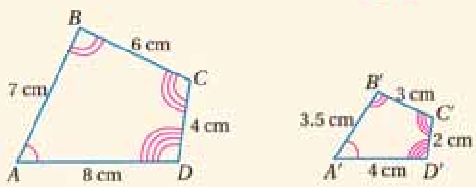


تحديد الأشكال المتشابهة ، عندما يكون للمضلعات الشكل نفسه وإن اختلفت في أطوال أضلاعها، فإنها تسمى **مضلعات متشابهة.**

مفهوم أساسي — المضلعات المتشابهة

التعبير اللفظي يتشابه مضلعان إذا وفقط إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة.

الرموز يقرأ الرمز ~ مشابه لـ **مثال**



إرشادات

التشابه والتطابق

إذا كان المضلعان متطابقين فإنهما متشابهان أيضًا. وتكون جميع الزوايا المتناظرة متطابقة، وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة، والنسبة بين كل ضلعين متناظرين هي 1:1.

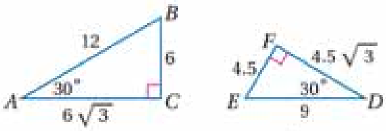
ترتيب رؤوس المضلع في أي عبارة تشابه مهم جدًّا؛ فهو يبين الأضلاع المتناظرة والزوايا المتناظرة.

عبارة التشابه	الزوايا المتناظرة	الأضلاع المتناظرة
$ABCD \sim EFGH$	$\angle A \cong \angle E$ $\angle B \cong \angle F$ $\angle C \cong \angle G$ $\angle D \cong \angle H$	$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}$

وكما هو الحال في المضلعات المتطابقة، فإن المضلعات المتشابهة يمكن تغيير وضعها لِيَسْهُل تحديد الأجزاء المتناظرة فيها.

مثال المضلعات المتشابهة

1 حدد إذا كان المثلثان إلى اليسار متشابهين أم لا. وبرّر إجابتك.



بما أن الزوايا القائمة جميعها متطابقة، فإن $\angle C \cong \angle F$. وبما أن $m\angle A = m\angle D$، فإن $\angle A \cong \angle D$. وحسب نظرية الزاوية الثالثة، فإن $\angle B \cong \angle E$، لذلك فالزوايا المتناظرة جميعها متطابقة.

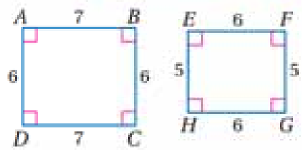
بقي أن نحدد إن كانت الأضلاع المتناظرة متناسبة أم لا.

الضلعان المقابلان للزاويتين: $60°$	الضلعان المقابلان للزاويتين: $30°$	الضلعان المقابلان للزاويتين: $90°$
$\frac{AC}{DF} = \frac{6\sqrt{3}}{4.5\sqrt{3}} = 1.\overline{3}$	$\frac{BC}{EF} = \frac{6}{4.5} = 1.\overline{3}$	$\frac{AB}{DE} = \frac{12}{9} = 1.\overline{3}$

وبما أن النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية، والزوايا المتناظرة متطابقة، فإن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

تحقق من فهمك

(1



معامل التشابه: عند مقارنة أطوال الأضلاع المتناظرة لمضلعين متشابهين، فإن النسبة بين طولي كل ضلعين متناظرين تكون ثابتة. وتسمى هذه النسبة **مقياس الرسم** أو معامل التشابه للمضلعين.

مثال من واقع الحياة

2 **سيارات:** الصورة إلى اليسار نموذج مصغر لسيارة قديمة. فإذا كان طول هذا النموذج **6.5 in**، وطول السيارة **13 ft**، فما مقياس الرسم لهذا النموذج مقارنة بالسيارة؟

مراعيًا أن يكون القياسان بوحدة القياس نفسها.

$13(12) = 156\,\text{in}$ بتحويل الأقدام إلى بوصات.

$\left(\frac{\text{طول النموذج}}{\text{طول السيارة الحقيقي}}\right) = \frac{6.5\,\text{in}}{156\,\text{in}} = \frac{1}{24}$ اكتب التناسب ثم بسّط.

إذن، مقياس الرسم يساوي $\frac{1}{24}$. أيْ أن طول النموذج يساوي $\frac{1}{24}$ من طول السيارة الحقيقي.

تحقق من فهمك

2) **نموذج:** تتكون عمارة من 5 طوابق، فإذا كان ارتفاع الطابق الواحد 4 m، ومُثّلت بنموذج ارتفاعه 25 cm، فأوجد مقياس رسم النموذج مقارنة بالأصل.

إرشادات

خطأ شائع

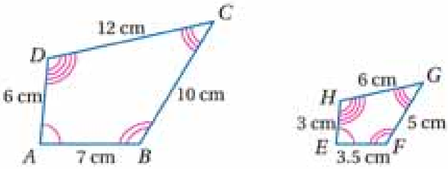
عندما تكون رؤوس مضلعين مسماة بحروف هجاء مرتبة، فإن هذا لا يعني أن الرؤوس المتناظرة في عبارة التشابه ستتبع الترتيب نفسه لحروف الهجاء.

إرشادات

التحقق من النتائج

عند حل المسائل الكلامية حلل جوابك لتتحقق من أنه جواب معقول، وأنك أجبت عن السؤال المطلوب.

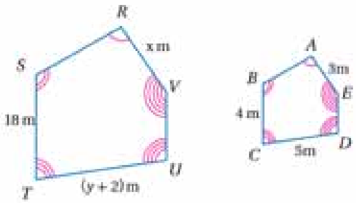
عند إيجاد مقياس الرسم لمضلعين متشابهين فإن قيمته تعتمد على ترتيب المقارنة.



- مقياس رسم الشكل الرباعي $ABCD$ إلى الشكل الرباعي $EFGH$ يساوي 2.
- ومقياس رسم الشكل الرباعي $EFGH$ إلى الشكل الرباعي $ABCD$ يساوي $\frac{1}{2}$.

مثال الأجزاء المتناسبة ومعامل التشابه

3 المضلعان إلى اليسار متشابهان.



a) اكتب عبارة تشابه، ثم أوجد قيمة كل من: x ، y ، UT.

استعمل الزوايا المتطابقة لكتابة الرؤوس المتناظرة بالترتيب.

المضلع $RSTUV \sim$ المضلع $ABCDE$

والآن، اكتب التناسبات لإيجاد قيمة x و y.

لإيجاد قيمة x:

$\frac{ST}{BC} = \frac{VR}{EA}$ الأضلاع المتناظرة متناسبة

$\frac{18}{4} = \frac{x}{3}$ $ST = 18, BC = 4$ ، $VR = x, EA = 3$

$18(3) = 4(x)$ بالضرب التبادلي

$54 = 4x$ بالضرب.

$13.5 = x$ بقسمة الطرفين على 4.

لإيجاد قيمة y:

$\frac{ST}{BC} = \frac{UT}{DC}$ الأضلاع المتناظرة متناسبة

$\frac{18}{4} = \frac{y+2}{5}$ $ST = 18, BC = 4$ ، $UT = y + 2, DC = 5$

$18(5) = 4(y+2)$ بالضرب التبادلي

$90 = 4y + 8$ بالضرب.

$82 = 4y$ بطرح 8 من الطرفين.

$20.5 = y$ بقسمة الطرفين على 4.

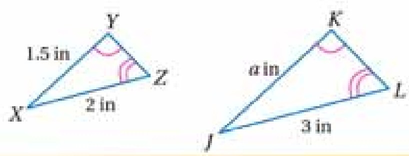
$UT = y + 2$ ، لذلك $UT = 20.5 + 2 = 22.5$.

b) أوجد مقياس الرسم للمضلع $RSTUV$ إلى المضلع $ABCDE$.

النسبة بين كل ضلعين متناظرين $\frac{ST}{BC} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$.

تحقق من فهمك

3) اكتب عبارة تشابه، ثم أوجد a، ومعامل التشابه للمثلث $\triangle JKL$ إلى $\triangle XYZ$



إرشادات

التحقق من صحة الحل

للتحقق من معامل التشابه أوجد النسبة بين طولي ضلعين متناظرين آخرين.

مثال تكبير الأشكال أو تصغيرها

4 $\triangle ABC$ يشابه $\triangle XYZ$ بمقياس رسم $\frac{2}{3}$. إذا كانت أطوال أضلاع $\triangle ABC$ تساوي 6، 8، 10، فما أطوال أضلاع $\triangle XYZ$؟

اكتب التناسبات لإيجاد أطوال الأضلاع.

$\frac{10}{z} = \frac{2}{3}$ ($\triangle ABC \rightarrow$, $\triangle XYZ \rightarrow$)
$30 = 2z$
$15 = z$

$\frac{8}{y} = \frac{2}{3}$ ($\triangle ABC \rightarrow$, $\triangle XYZ \rightarrow$)
$24 = 2y$
$12 = y$

$\frac{6}{x} = \frac{2}{3}$ ($\triangle ABC \rightarrow$, $\triangle XYZ \rightarrow$)
$18 = 2x$
$9 = x$

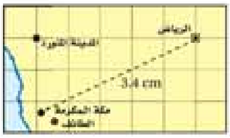
إذن، أطوال أضلاع $\triangle XYZ$ تساوي 9، 12، 15.

✓ تحقق من فهمك

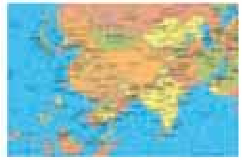
4) المستطيل $QRST$ يشابه المستطيل $JKLM$، ومقياس الرسم هو $\frac{4}{5}$.
إذا كانت أطوال أضلاع المستطيل $QRST$ ‏5 cm, 12 cm ، فما أطوال أضلاع المستطيل $JKLM$؟

مثال

مقاييس رسم الخرائط



5 خرائط: مقياس الرسم على خريطة للمملكة العربية السعودية هو **2 cm : 512 km**. فإذا كانت المسافة بين مكة المكرمة والرياض على الخريطة تساوي **3.4 cm** تقريبًا. فكم ساعة تحتاج لقطع المسافة من الرياض إلى مكة المكرمة إذا قدت سيارتك بسرعة **96 km/h** في الساعة؟



الربط مع واقع الحياة

وضع رسامو الخرائط السابقون شبكة خطوط على الخريطة لتعيين المواقع. وهذا مثال مبكر للهندسة الإحداثية. وفي رسم الخرائط الحديث تستعمل خطوط الطول ودوائر العرض لتحديد المواقع على سطح الأرض.

استكشف كل سنتمترين على الخريطة يمثلان 512 km. والمسافة على الخريطة بين مكة المكرمة والرياض 3.4 cm.

خطط اكتب تناسبًا يربط القياسات الواقعية بمقياس الرسم لإيجاد المسافة الحقيقية بالكيلومترات، ثم استعمل العلاقة $d = rt$ لإيجاد الزمن. حيث d تعني المسافة، t الزمن، r السرعة.

حل

$$\frac{2}{512} = \frac{3.4}{x}$$ ← سنتمترات ← كيلومترات

$2x = 1740.8$ بالضرب التبادلي

$x = 870.4$ بقسمة الطرفين على 2

أيْ أنّ المسافة بين مكة المكرمة والرياض تساوي 870.4 km تقريبًا.

$$d = rt$$

$870.4 = 96t$ بالتعويض

$\frac{870.4}{96} = t$ بقسمة الطرفين على 96.

$9\frac{1}{15} = t$ بالتبسيط.

أي أن الرحلة من الرياض إلى مكة المكرمة ستستغرق $9\frac{1}{15}$ ساعات، أو 9 ساعات و 4 دقائق.

تحقق اختبر مقياس الرسم. بما أن المسافة على الخريطة تساوي 3.5 سنتمترات تقريبًا، فإن المسافة الحقيقية تساوي 896 km تقريبًا. وعند قيادة السيارة بسرعة تساوي 96 km في الساعة لمدة 9 ساعات، فإن المسافة المقطوعة تساوي 864 km. والمسافتان متقاربتان جدًّا، لذا، فالجواب معقول.

إرشادات

وحدات الزمن

تذكر أن الساعة 60 دقيقة، وأن $\frac{1}{15}$ ساعة تعني 4 دقائق.

✓ تحقق من فهمك

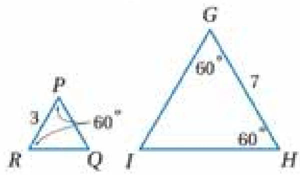
5) إذا كانت المسافة بين الرياض والقصيم على الخريطة تساوي 1.3 cm. فكم ساعة تحتاج إلى قطع هذه المسافة إذا قدت سيارتك بسرعة 88 km في الساعة؟

تأكد

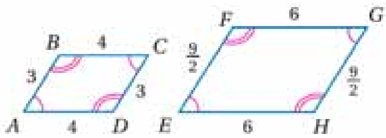
مثال 1 (ص. 79)

حدد إذا كان كل شكلين في السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وبرر إجابتك:

1)



2)



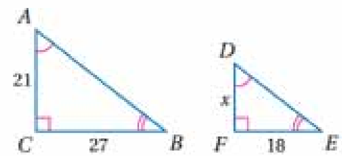
مثال 2 (ص. 79)

3) **نماذج:** عمل ياسر نموذجًا لجسر في مدينته. فإذا كان طول الجسر 20 m، وطول النموذج 15 cm. فما مقياس الرسم الذي استعمله ياسر في عمل النموذج؟

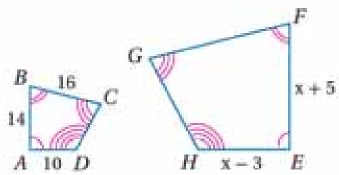
مثال 3 (ص. 80)

كل زوج من المضلعات في السؤالين الآتيين متشابهان. اكتب عبارة تشابه، وأوجد قيمة x، ومقياس الرسم المستعمل:

4) $\overline{DF}$



5) $\overline{FE}, \overline{EH}, \overline{GF}$



مثال 4 (ص. 80)

6) المثلث JKL يشابه المثلث $\triangle TUV$، ومقياس الرسم هو $\frac{3}{4}$ فإذا كانت أطوال أضلاع $\triangle TUV$ هي 4 cm, 6 cm, 8 cm، فما أطوال أضلاع $\triangle JKL$؟

مثال 5 (ص. 81)

7) **خرائط:** ارجع إلى مثال 5 صفحة 81. إذا كانت المسافة بين المدينة المنورة وجدة على الخريطة تساوي 1.7 cm تقريبًا. فكم ساعة ستستغرق الرحلة بين المدينتين إذا كانت السرعة المتوسطة للسيارة 105 km /h؟

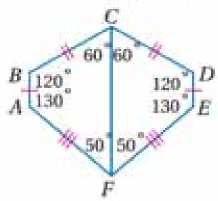
تمارين ومسائل

مساعدة الواجب المنزلي

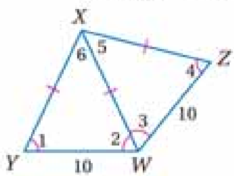
للأسئلة	انظر الأمثلة
8–11	1
12, 13	2
14–19	3
22, 23	4
20, 21	5

حدد إذا كان كل زوج من الأشكال في الأسئلة الآتية متشابهين أم لا، وبرر إجابتك:

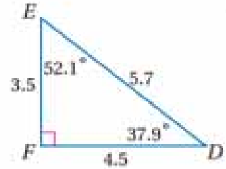
8)



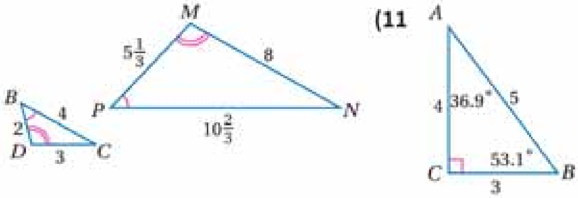
9)



10)



11)



12) **نسخ الأوراق:** صوّر طالب نسخة من ورقة على آلة التصوير. وعندما نظر إلى الصورة وجدها مصغرة إلى 80% من حجمها الأصلي. فإذا أراد تكبيرها إلى الحجم الأصلي، فما معامل التكبير الذي سيستعمله؟

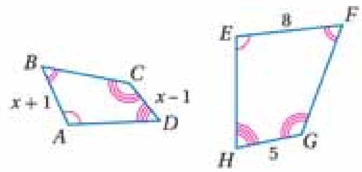
13) **عمارة:** ترتفع قلعة الدوسرية 8 m . وقد عُمل لها نموذج مصغر ارتفاعه 50 cm، فما مقياس رسم القلعة إلى النموذج؟

الربط مع واقع الحياة

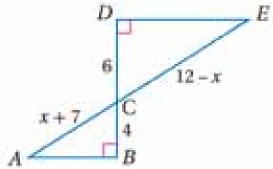
تعد قلعة الدوسرية من المعالم التاريخية البارزة في مدينة جازان، وهي مربعة الشكل ومساحتها الإجمالية $900\ m^2$، ومدعمة بأربعة أبراج ضخمة.

كل زوج من المضلعات في الأسئلة الآتية متشابهان. اكتب عبارة تشابه وأوجد قيمة x، وأطوال الأضلاع المشار إليها، ومقياس الرسم.

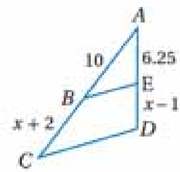
14) $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$



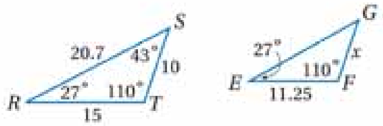
15) $\overline{AC}$ و $\overline{CE}$



16) $\overline{BC}$ و $\overline{ED}$

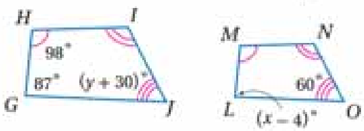


17) $\overline{GF}$ و $\overline{EG}$

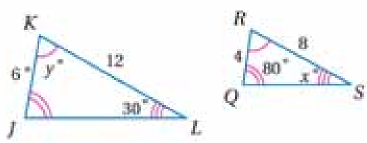


كل زوج من المضلعات في الأسئلة الآتية متشابهان. أوجد قيمة كل من x و y، مقربًا القيم إلى أقرب جزء من مئة إن لزم ذلك:

18)



19)



خرائط: للسؤالين 21 , 20، استعمل المعلومات الآتية:

خريطة مرسومة بمقياس رسم 1 cm : 60 km.

20) المسافة من المدينة C إلى المدينة D على الخريطة تساوي 1.8 cm، فكم ساعة تستغرق الرحلة من C إلى D إذا كانت السرعة المتوسطة للسيارة 90 km/h؟

21) استعمل المسطرة ومقياس الرسم المعطى لحساب المسافة من المدينة A إلى المدينة S، وبين كم ساعة ستستغرق الرحلة من A إلى S إذا كانت السرعة المتوسطة للسيارة 90 km/h؟

22) أطوال أضلاع مثلث بالأمتار 3,4,5. فإذا كُبِّر هذا المثلث بحيث ظلّ المثلث الكبير مشابهًا للمثلث الأصلي بمقياس رسم 1:5. أوجد محيط المثلث الكبير.

23) مستطيل طوله 60 cm، وعرضه 40 cm. صُغِّر هذا المستطيل بحيث ظلّ المستطيل الصغير مشابهًا للمستطيل الأصلي بمقياس رسم $\frac{1}{4}$. أوجد طول المستطيل الصغير وعرضه.

رياضة: **ارسم كل ميدان مما يأتي مستعملاً مقياس الرسم المذكور:**

24) ساحة اصطفاف للطلبة مربعة الشكل، طول ضلعها 30 m. استعمل مقياس الرسم 3 m : 0.5cm.

25) ملعب كرة قدم مستطيل الشكل، طوله 100 m وعرضه 60 m. استعمل مقياس الرسم 10m : $\frac{1}{4}$cm.

الربط مع واقع الحياة

صمم إستاد الملك فهد في مدينة الرياض بشكل هندسي جميل يجمع بين الطابع العربي القديم والتطور المعماري الحديث، حيث يأخذ شكل الخيمة.

تحليل الرسوم البيانية: **لحل السؤالين 27 , 26 استعمل الرسم البياني إلى اليسار، حيث استعملت المستطيلات لتمثيل النسب المئوية:**

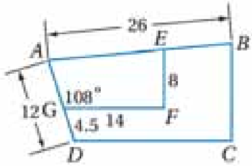
26) هل المستطيل الذي يمثل 34% مشابه للمستطيل الذي يمثل 18%؟ برّر إجابتك.

27) ما النسبة بين مساحتي المستطيلين اللذين يمثلان 18% و 9%؟ قارن هذه النسبة مع النسبة بين النسبتين المئويتين اللتين تمثلانهما.

لحل الأسئلة 35–28، استعمل المعلومات الآتية لإيجاد كل قياس:

$AEFG \sim ABCD, GF = 14, AD = 12,$
$DG = 4.5, EF = 8, AB = 26, m\angle AGF = 108°$.

28) مقياس الرسم الذي ينقل شبه المنحرف $ABCD$ إلى شبه المنحرف $AEFG$



29) AG 30) DC

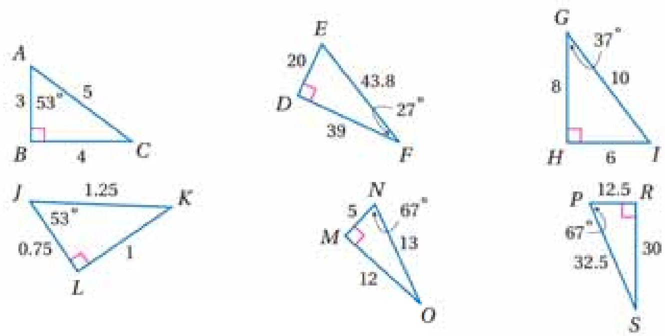
31) $m\angle ADC$ 32) BC

33) محيط شبه المنحرف $ABCD$.

34) محيط شبه المنحرف $AEFG$.

35) النسبة بين محيط المضلع $ABCD$ ومحيط المضلع $AEFG$.

36) حدد أي المثلثات القائمة الآتية متشابهة. وبرر إجابتك.



حدد إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا، أو أحيانًا، أو ليست صحيحة أبدًا:

37) كل مثلثين متطابقين متشابهان.

38) كل مربعين متشابهان.

39) المثلثان متطابقا الضلعين متشابهان.

40) المثلثان منفرجا الزاوية متشابهان.

41) المثلثان متطابقا الأضلاع متشابهان.

هندسة إحداثية: لحل الأسئلة 47–42، استعمل المعلومات الآتية:

يمكن أن تستعمل مقياس الرسم لعمل أشكال متشابهة. والشكل الناتج إما أن يكون تكبيرًا للشكل الأصلي، أو تصغيرًا له بحسب مقياس الرسم. فإذا كانت رؤوس $\triangle ABC$ هي $A(0, 0), B(8, 0), C(2, 7)$ وضربت إحداثيات الرؤوس في العدد 2 فتنتج $\triangle A'B'C'$.

42) أوجد إحداثيات رؤوس $\triangle A'B'C'$.

43) ارسم $\triangle ABC$، و $\triangle A'B'C'$.

44) استعمل قانون المسافة لإيجاد أطوال أضلاع كل مثلث.

45) أوجد النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

46) كيف يمكنك استعمال الميل لمعرفة إن كانت الزوايا متطابقة؟

47) هل $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$؟ برّر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

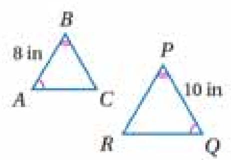
48) **اكتشف الخطأ:** حسب كل من سعود وناصر مقياس الرسم لمثلثين متشابهين. فأيهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

سعود

$$\frac{AB}{QP} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

ناصر

$$\frac{QP}{AB} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$



49) **مسألة مفتوحة:** أوجد مثالاً مضادًا للعبارة: "جميع المستطيلات متشابهة".

تحدٍ: لحل الأسئلة 52–50، استعمل المعلومات الآتية:

المستطيل $ABCD$ مشابه للمستطيل $WXYZ$، والنسبة بين أطوال أضلاعهما المتناظرة 4:1.

50) ما النسبة بين مساحتي المستطيلين؟

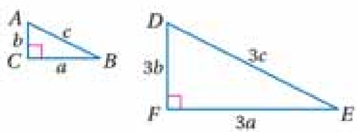
51) افرض أن أطوال أضلاع المستطيلين قد ضرب كل منها في 3. فما النسبة الجديدة بين أطوال أضلاع المستطيلين؟

52) ما النسبة بين مساحتي المستطيلين الناتجين؟

تحدٍ: استعمل $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ لحل السؤالين 53, 54.

53) بيّن أن النسبة بين محيطي المثلثين هي نفسها النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

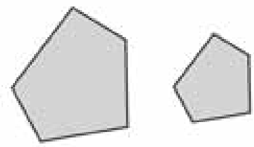
54) إذا أُضيف إلى طول كل ضلع 6 وحدات، فهل المثلثان الناتجان متشابهان؟ وضح إجابتك.



55) **اكتب:** ارجع إلى الشكل المجاور لفقرة "استعد" صفحة 78، وصف كيف استعملت الأشكال المتشابهة للإبداع في العمل الفني.

تدريب على اختبار معياري

56) استُعمِل مقياس الرسم $\frac{2}{3}$ للحصول على الخماسي الصغير من الخماسي الكبير.



كيف يُقارَنُ محيط الخماسي الصغير بمحيط الخماسي الكبير؟

A محيط الخماسي الصغير $\frac{2}{3}$ محيط الكبير.

B محيط الخماسي الصغير $\frac{4}{9}$ محيط الكبير.

C محيط الخماسي الصغير $\frac{8}{27}$ محيط الكبير.

D محيط الخماسي الصغير $\frac{1}{3}$ محيط الكبير.

57) مجموعة حل المتباينة $4(3x-5)+7 \geq 8x+3$ هي:

A $\{x \mid x \geq 4\}$

B $\{x \mid x \geq 8\}$

C $\{x \mid x \leq 4\}$

D $\{x \mid x \leq 8\}$

مراجعة تراكمية

حل كل تناسب مما يأتي: (درس 1-6)

58) $\frac{b}{7.8} = \frac{2}{3}$

59) $\frac{c-2}{c+3} = \frac{5}{4}$

60) $\frac{2}{4y+5} = \frac{-4}{y}$

61) $\frac{2x+3}{x-1} = \frac{-4}{5}$

62) $\frac{2d-8}{6} = \frac{3d+4}{-2}$

63) $\frac{-5}{3k+1} = \frac{-3}{2k-6}$

ارسم كل شكل رباعي على مستوى إحداثي، وسمّه. (درس 7-5)

64) متوازي أضلاع ارتفاعه c، وطول قاعدته b.

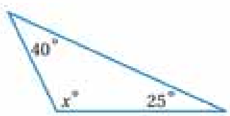
65) مستطيل طوله $2a$، وعرضه b.

أوجد قيمة x في كل مما يأتي: (الدرس 2-3)

66)

67)

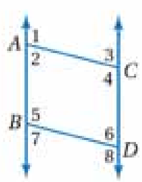
68)



69) افرض أن قاطعًا قطع مستقيمين متوازيين، وأن $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان داخليتان متبادلتان. فأوجد $m\angle 1$ و $m\angle 2$ إذا كان $m\angle 1 = 10x - 9$ و $m\angle 2 = 9x + 3$. (درس 2-2)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: في الشكل إلى اليسار $\overline{AB} \parallel \overline{CD}, \overline{AC} \parallel \overline{BD}, m\angle 4 = 118$.



أوجد قياس كل زاوية فيما يأتي: (درس 2-2)

70) $\angle 1$

71) $\angle 2$

72) $\angle 3$

73) $\angle 5$

74) $\angle 6$

75) $\angle 8$

6-3 المثلثات المتشابهة
Similar Triangles

فكرة الدرس

- أحدد المثلثات المتشابهة.
- أستعمل المثلثات المتشابهة في حل المسائل.

استعد

بُني برج إيفل في باريس عام 1889 على يد المهندس الفرنسي جوستاف إيفل (1832–1923) المتخصص في الإنشاءات المعدنية. وقد استعمل آلافًا من المثلثات في بناء البرج، بعضها له الشكل نفسه ولكنها مختلفة في الأبعاد؛ لأن الأشكال المثلثية تعطي البناء قوة ومتانة.

تحديد المثلثات المتشابهة: تعلمت في الفصل الثالث عدة اختبارات لتحديد إذا كان مثلثان متطابقين أم لا، ولتشابه المثلثات اختبارات أيضًا.

معمل الهندسة

المثلثات المتشابهة

- ارسم $\triangle DEF$ الذي فيه $m\angle D = 35, m\angle F = 80, DF = 4\,\text{cm}$.
- ارسم $\triangle RST$ الذي فيه $m\angle T = 35, m\angle S = 80, ST = 7\,\text{cm}$.
- أوجد قياس كل من $\overline{EF}$ و $\overline{ED}, \overline{RS}, \overline{RT}$.
- احسب النسب $\frac{FD}{ST}, \frac{EF}{RS}, \frac{ED}{RT}$

تحليل النتائج

1) ماذا يمكنك أن تستنتج حول جميع النسب؟

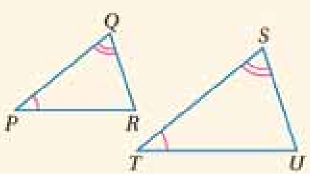
2) كرر النشاط مع مثلثين آخرين زواياهما متساوية في القياس ولكن أضلاعهما مختلفة في الطول، ثم كرر النشاط لزوج ثالث من المثلثات. هل المثلثان في كل حالة متشابهان؟ وضح إجابتك.

3) ما أقل عدد من الشروط اللازمة ليتشابه مثلثان؟

يقودنا المعمل السابق إلى المسلّمة الآتية:

مسلمة 6.1 التشابه بزاويتين (AA)

إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر، فإن المثلثين متشابهان.



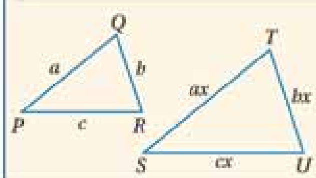
مثال: $\angle Q \cong \angle S$, و $\angle P \cong \angle T$
لذلك $\triangle PQR \sim \triangle TSU$.

يمكنك أن تستعمل مسلّمة التشابه AA لإثبات نظريتين تحققان تشابه المثلثات.

النظريتان 6.1 و 6.2

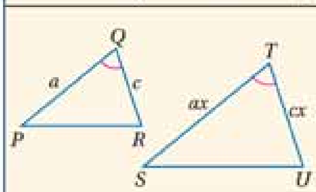
6.1 التشابه بثلاثة أضلاع (SSS)، إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متناسبة، فإن المثلثين متشابهان.

مثال، $\frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TU} = \frac{RP}{US}$ لذلك $\triangle PQR \sim \triangle TSU$



6.2 التشابه بضلعين وزاوية محصورة (SAS)، إذا كان طولا ضلعين في مثلث متناسبين مع طولي الضلعين المناظرين في مثلث آخر والزاويتان المحصورتان متطابقتين فإن المثلثين متشابهان.

مثال، $\frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TU}$ و $\angle Q \cong \angle T$. لذلك $\triangle PQR \sim \triangle TSU$.



سوف تبرهن النظرية 6.2 في السؤال 23.

برهان

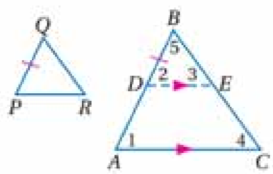
النظرية 6.1

المعطيات، $\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA}$

المطلوب، إثبات أن $\triangle BAC \sim \triangle QPR$

عين النقطة D على $\overline{AB}$ بحيث يكون $\overline{DB} \cong \overline{PQ}$

وارسم $\overline{DE}$ بحيث يكون $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$.



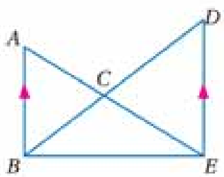
برهان حر،

بما أن $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$، فإن $\angle 2$ و $\angle 1$ زاويتان متناظرتان، و $\angle 3$ و$\angle 4$ زاويتان متناظرتان، لذلك $\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 3$. وبناءً على التشابه بـ AA يكون $\triangle BDE \sim \triangle BAC$. وبما أن $\overline{DB} \cong \overline{PQ}$، فإن $DB = PQ$. وبالتعويض في $\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA}$ تصبح $\frac{DB}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA}$. ومن تعريف المضلعين المتشابهين، $\frac{DB}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{ED}{CA}$. وبالتعويض ينتج $\frac{QR}{BC} = \frac{BE}{BC}$ و $\frac{RP}{CA} = \frac{ED}{CA}$. وهذا يعني أن $QR = BE$ و $RP = ED$ أو $\overline{QR} \cong \overline{BE}$ و $\overline{RP} \cong \overline{ED}$. بهذين التطابقين و $\overline{DB} \cong \overline{PQ}$ يكون $\triangle BDE \cong \triangle QPR$ بحسب التطابق بثلاثة أضلاع (SSS). ومن تعريف تطابق المثلثين، يكون $\angle B \cong \angle Q$ و$\angle 2 \cong \angle P$. لكن $\angle 2 \cong \angle A$، لذلك $\angle A \cong \angle P$. ومن التشابه بـ AA يكون، $\triangle BAC \sim \triangle QPR$.

مثال على اختبار معياري

هل المثلثان متشابهان؟

1 في الشكل إلى اليسار $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$. أي نظرية أو مسلمة يمكن أن تستعمل لإثبات أن $\triangle ACB \sim \triangle ECD$؟.



A ASA **B** SSS **C** AA **D** SAS

اقرأ فقرة الاختبار مطلوب منك تحديد النظرية أو المسلمة التي يمكن أن تستعمل لإثبات أن $\triangle ACB$ مشابه لـ $\triangle ECD$.

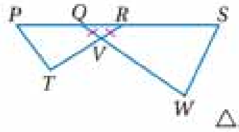
حل فقرة الاختبار بما أن $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$، فإن $\angle BAE \cong \angle DEA$ بحسب نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة، $\angle ACB \cong \angle ECD$ بحسب نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس. إذن، ومن التشابه بـ AA يكون $\triangle ACB \sim \triangle ECD$. إذن، فالجواب C.

إرشادات الاختبار

المثلثات المتداخلة

عندما يتداخل مثلثان، من الأفضل رسمهما منفصلين بحيث تكون الأجزاء المتناظرة في المواقع نفسها على الورقة، ثم كتابة الأجزاء المتناظرة.

تحقق من فهمك



1) في الشكل إلى اليسار $\overline{QV} \cong \overline{RV}, PR = 9, QS = 15,$
$TR = 12, QW = 20$. أي العبارات الآتية صحيحة؟

F $\triangle PTR \sim \triangle QWS$ | **H** $\triangle PTR \sim \triangle QVR$

G $\triangle QVR \sim \triangle SWQ$ | **J** $\triangle PTR \sim \triangle SWQ$

وتشابُه المثلثات مثلُ تطابقِ المثلثات يحقّق خواصّ الانعكاس والتماثل والتعدي.

النظرية 6.3

تشابُه المثلثات علاقة انعكاسية ومتماثلة ومتعدية.

مثال: في المثلث $\triangle ABC$

الانعكاس: $\triangle ABC \sim \triangle ABC$ **التماثل:** إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$، فإن $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

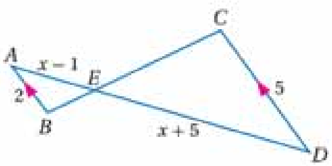
التعدي: إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ و $\triangle DEF \sim \triangle GHI$، فإن $\triangle ABC \sim \triangle GHI$.

سوف تبرهن النظرية 6.3 في السؤال 25.

استعمال المثلثات المتشابهة: يمكن أن تستعمل المثلثات المتشابهة لحل المسائل.

مثال 2 أجزاء المثلثين المتشابهين

2) جبر: أوجد AE و DE.



بما أن $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ فإن $\angle BAE \cong \angle CDE$

و $\angle ABE \cong \angle DCE$ لأنها زوايا داخلية متبادلة.

وبناءً على التشابه بـ AA يكون $\triangle ABE \sim \triangle DCE$.

وباستعمال تعريف المضلعين المتشابهين

يكون $\frac{AB}{DC} = \frac{AE}{DE}$.

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AE}{DE}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{x-1}{x+5} \quad \text{بالتعويض}$$

$$2(x+5) = 5(x-1) \quad \text{بالضرب التبادلي}$$

$$2x + 10 = 5x - 5 \quad \text{خاصية التوزيع}$$

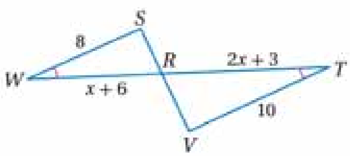
$$-3x = -15 \quad \text{بطرح } 5x \text{ و } 10 \text{ من الطرفين}$$

$$x = 5 \quad \text{بقسمة الطرفين على } -3$$

والآن، أوجد AE و ED

$$AE = x - 1 = 5 - 1 = 4$$
$$DE = x + 5 = 5 + 5 = 10$$

تحقق من فهمك



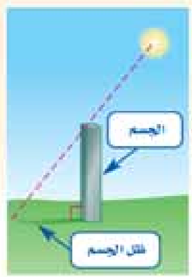
2) أوجد قيمة RT و WR.

المثلثات المتشابهة يمكن أن تستعمل في الحسابات غير المباشرة.

إرشادات

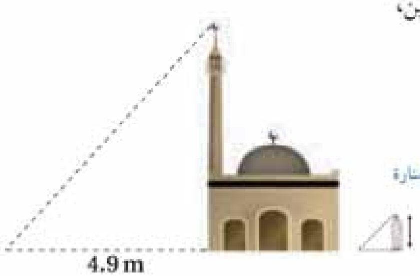
مسائل الظل

في مسائل الظل، نفترض أن مثلثًا قائم الزاوية يتشكل من شعاع للشمس من قمة الجسم إلى طرف الظل.



مثال من واقع الحياة **قياسات غير مباشرة**

3 منارة: يحتاج خليل تحديد ارتفاع منارة مسجد. فإذا كان طول خليل 1.7 m وطول ظله 70cm. وكان طول ظل المنارة 4.9 m، فكم يبلغ ارتفاع المنارة؟



لو افترضنا أن أشعة الشمس تشكّل مثلثين متشابهين،

فيمكن كتابة التناسب على النحو الآتي:

$$\frac{\text{ارتفاع المنارة}}{\text{طول خليل}} = \frac{\text{طول ظل المنارة}}{\text{طول ظل خليل}}$$

$\frac{x}{1.7} = \frac{4.9}{0.7}$	بالتعويض، حيث x ارتفاع المنارة
$0.7x = 1.7(4.9)$	بالضرب التبادلي
$0.7x = 8.33$	بالتبسيط
$x = 11.9$	بقسمة الطرفين على 0.7

أي أن ارتفاع المنارة يساوي 11.9 m.

تحقق من فهمك

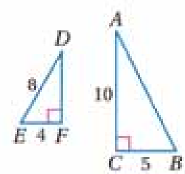
3) يقف كمال إلى جانب برج . فإذا كان طول كمال 180 cm وطول ظله 270 cm، وكان طول ظل البرج 96.75 m، فكم مترًا ارتفاع البرج؟

تأكد

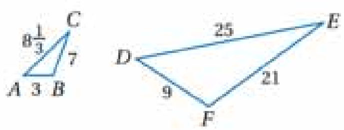
مثال 1 (ص. 88)

حدد إذا كان كل زوج من المثلثات في السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وبرر إجابتك:

1)



2)



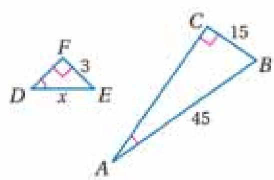
3) **اختيار من متعدد:** إذا كانت $\angle A \cong \angle F$ في $\triangle ABC$ و $\triangle FGH$، فأي مما يأتي سيكون شرطًا كافيًا لتشابه المثلثين؟

A $\frac{BC}{GH} = \frac{AC}{FH}$　B $\frac{AC}{FH} = \frac{AB}{FG}$　C $\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH}$　D $\frac{AB}{BC} = \frac{FG}{GH}$

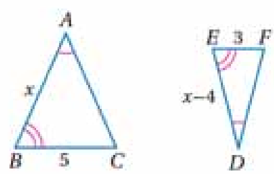
مثال 2 (ص. 89)

جبر: حدد المثلثين المتشابهين، وأوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المشار إليها في كل سؤال مما يلي:

4) $\overline{DE}$



5) $\overline{AB}$ و $\overline{DE}$



مثال 3 (ص. 90)

6) **اتصالات:** يبلغ طول ظل برج اتصالات هاتفية $100ft$. وفي الوقت نفسه يبلغ ارتفاع بناية مجاورة للبرج $4ft\ 6in$ وطول ظلها $3ft\ 4in$. أوجد ارتفاع البرج. (إرشاد: ارسم رسمًا توضيحيًا).

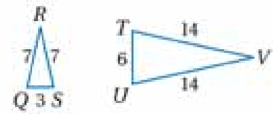
تمارين ومسائل

مساعدة الواجب المنزلي

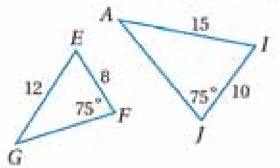
للأسئلة	انظر الأمثلة
7–10	1
11–13	2
14–17	3

حدد إذا كان كل زوج من المثلثات في الأسئلة الآتية متشابهين أم لا وبرر إجابتك:

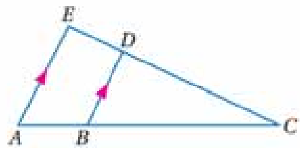
7)



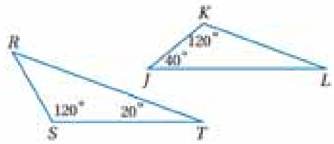
8)



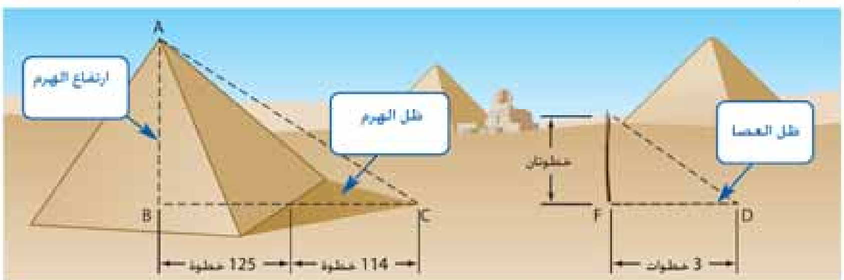
9)



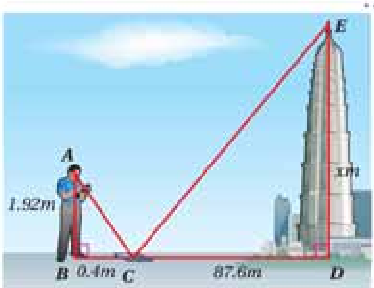
10)



11) تاريخ: أول من قاس ارتفاع الهرم باستعمال الهندسة هو الرياضي اليوناني طاليس، فقد بين أن نسبة ارتفاع الهرم إلى طول عصا غُرستْ عموديًّا في الأرض تساوي نسبة طول ظل الهرم إلى طول ظل العصا. فإذا كانت الخطوة في الرسم أدناه تساوي 90cm تقريبًا، فكم مترًا يكون ارتفاع الهرم تقريبًا في ذلك الوقت؟



أبراج: استعمل المعلومات الآتية لحل السؤالين 12 و 13:
لتقدير ارتفاع برج Jin Mao في شنغهاي في الصين، شاهد سائح قمة البرج في مرآة موضوعة على الأرض ووجهها إلى الأعلى.

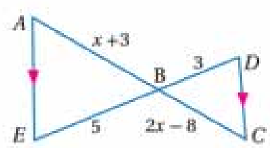


12) كم مترًا ارتفاع البرج تقريبًا؟

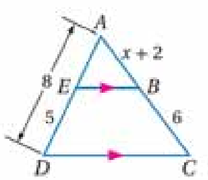
13) لماذا تكون طريقة الانعكاس في المرآة في هذه الحالة أفضل للقياس غير المباشر لارتفاع البرج من استعمال الظل؟

جبر: حدد المثلثين المتشابهين، ثم أوجد x وأطوال الأضلاع المشار إليها في كل سؤال.

14) $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$

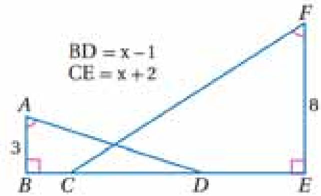


15) $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$

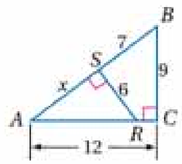


جبر: حدد المثلثين المتشابهين، ثم أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المشار إليها في كل من السؤالين الآتيين:

16) $\overline{BD}$ و $\overline{EC}$



17) $\overline{AB}$ و $\overline{AS}$



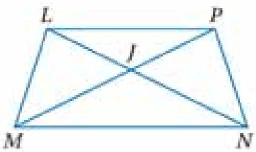
هندسة إحداثية: رؤوس المثلثين ABC و TBS هي:
$A(-2, -8), B(4, 4), C(-2, 7), T(0, -4), S(0, 6)$.

18) ارسم المثلثين، وأثبت أن $\triangle ABC \sim \triangle TBS$.

19) أوجد النسبة بين محيطي المثلثين.

20) إذا كانت أطوال أضلاع المثلث ABC تساوي 6 cm, 4 cm, 9 cm. وكان $\triangle DEF$ مشابهًا للمثلث ABC، وطول أحد أضلاع $\triangle DEF$ يساوي 36cm. فما أكبر قيمة ممكنة لمحيط $\triangle DEF$؟ فسر إجابتك.

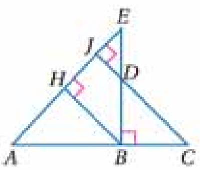
برهان: اكتب برهانًا من النوع المذكور لحل الأسئلة 25–21.



21) برهان ذو عمودين

المعطيات: $\overline{LP} \parallel \overline{MN}$

المطلوب: إثبات أن $\frac{LJ}{JN} = \frac{PJ}{JM}$



22) برهان حر

المعطيات: $\overline{EB} \perp \overline{AC},\ \overline{BH} \perp \overline{AE},\ \overline{CJ} \perp \overline{AE}$

المطلوب: إثبات أن a) $\triangle ABH \sim \triangle DCB$

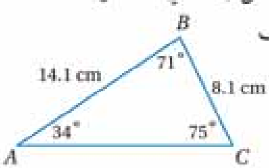
b) $\frac{BC}{BE} = \frac{BD}{AB}$

23) برهان ذو عمودين: إذا كان طولا ضلعين في مثلث متناسبين مع طولي الضلعين المناظرين لهما في مثلث آخر، وكانت الزاويتان المحصورتان متطابقتين، فإن المثلثين متشابهان. (النظرية 6.2)

24) برهان ذو عمودين: إذا كان طولا ساقي مثلث قائم الزاوية متناسبين مع طولي ساقي مثلث آخر قائم الزاوية، فإن المثلثين متشابهان.

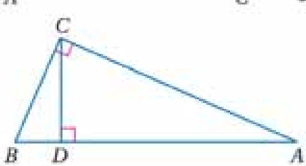
25) برهان ذو عمودين: تشابه المثلثات يحقق خاصية: الانعكاس والتماثل والتعدي. (النظرية 6.3)

مسائل مهارات التفكير العليا



26) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا مشابهًا للمثلث ABC، ووضّح كيف تعرف أنهما متشابهان.

27) **تبرير:** هل يمكن أن يكون المثلثان ABC , RST غير متشابهين، والمثلثان EFG , RST غير متشابهين، بينما المثلثان ABC , EFG متشابهان؟ اشرح إجابتك.



28) **تحدٍّ:** المثلث ABC مشابه للمثلثين الناتجين عن الارتفاع $\overline{CD}$، وهذان المثلثان متشابهان. اكتب ثلاث عبارات تمثل تشابه هذه المثلثات، مبينًا لماذا تكون متشابهة.

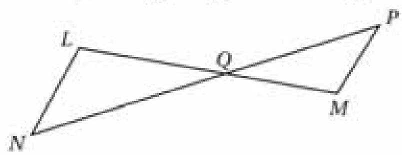
29) **اكتشف الخطأ:** كتبت سامية وغادة تناسبات للمثلثين المتشابهين إلى اليسار. فأيّهما إجابتها صحيحة؟ برر إجابتك.

سامية	غادة
$\frac{r}{k}=\frac{s}{m}$ $rm = ks$	$\frac{r}{k}=\frac{m}{s}$ $rs = km$

30) **اكتب:** قارن بين اختبارات تشابه مثلثين واختبارات تطابق مثلثين.

تدريب على اختبار معياري

31) في الشكل أدناه LM تقطع NP في النقطة Q.



ما المعلومة الإضافية التي تكفي لإثبات أن $\triangle LNQ \sim \triangle MPQ$؟

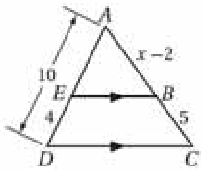
A $\overline{LQ}$ و $\overline{MQ}$ متطابقتان.

B $\angle QMP$ زاوية قائمة.

C $\overline{LN}$ و $\overline{PM}$ متوازيتان.

D $\angle NLQ$ و $\angle PQM$ متطابقتان.

32) إذا كان $\overline{DC} \parallel \overline{EB}$، فأوجد قيمة x.



F 9.5

G 5

H 4

J 2

33) **مراجعة** ما الإحداثي الصادي في الزوج المرتب الذي يمثل حلًّا لنظام المعادلتين الخطيتين الآتي؟

$$5x + 3y = 1$$

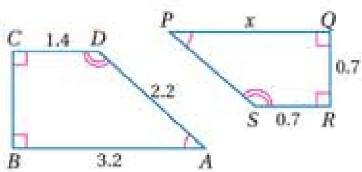
$$-3x - 2y = -2$$

A -5 **C** 4

B -4 **D** 7

مراجعة تراكمية

34) إذا كان المضلعان إلى اليسار متشابهين، فاكتب عبارة التشابه، ثم أوجد $PS, BC, X,$ ومقياس الرسم. (درس 2-6)



حل كل تناسب مما يلي: (درس 1-6)

35) $\frac{1}{y}=\frac{3}{15}$ 36) $\frac{6}{8}=\frac{7}{b}$ 37) $\frac{20}{28}=\frac{m}{21}$ 38) $\frac{16}{7}=\frac{9}{s}$

39) **قطار الألعاب:** يشترط عند ركوب قطار الألعاب أن يكون طول الراكب 135 cm على الأقل. فإذا كان طول عدنان 165 cm، فهل يمكنه أن يركب القطار؟ أي قانون منطقي يقودك إلى هذه النتيجة؟ (درس 4-1)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: اكتب كلاً مما يلي في أبسط صورة: (مهارة سابقة)

40) $\sqrt{\frac{24}{64}}$ 41) $\sqrt{\frac{75}{81}}$ 42) $\sqrt{\frac{72}{144}}$ 43) $\sqrt{\frac{32}{108}}$

اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-6 إلى 3-6

حل كل تناسب مما يأتي: (درس 1-6)

1) $\frac{3}{4}=\frac{x}{12}$

2) $\frac{7}{3}=\frac{28}{z}$

3) $\frac{z}{40}=\frac{5}{8}$

4) $\frac{x+2}{5}=\frac{14}{10}$

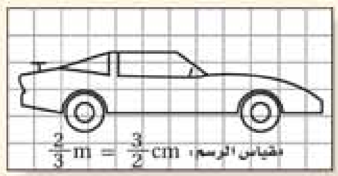
5) $\frac{3}{7}=\frac{7}{y-3}$

6) $\frac{4-x}{3+x}=\frac{16}{25}$

7) **خرائط:** يشير مقياس رسم الخريطة إلى أن 1.5 cm تمثل 100 km. إذا كانت المسافة على الخريطة بين مدينتي تبوك ونجران 28.9 cm، فكم تكون المسافة الحقيقية بين المدينتين تقريبًا؟ (درس 1-6)

8) **كرة السلة:** صوَّبَ لاعب دولي في كرة السلة 432 مرة نحو السلة، سجل منها 281 مرة. أوجد نسبة التسجيل لهذا اللاعب، واكتبها بالصورة العشرية مقربة إلى منزلتين عشريتين. (درس 1-6)

9) **اختيار من متعدد:** يستعمل ماجد ورقة مربعات سنتمترية لعمل رسم تخطيطي لسيارته. فإذا كان طول الرسم 11.25 cm، فكم سنتيمترًا طول السيارة الحقيقي؟ (درس 1-6)



A 500cm

B 489cm

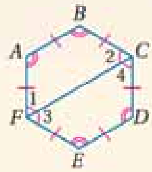
C 511cm

D 333cm

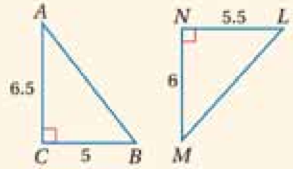
10) لوح من الخشب طوله 108cm، قُسم إلى جزأين النسبة بين طوليهما 2:7. فما طول كل جزء؟ (درس 1-6)

حدد إذا كان كل زوج من المضلعات في الأسئلة الآتية متشابهين أم لا . وبرر إجابتك. (درس 2-6)

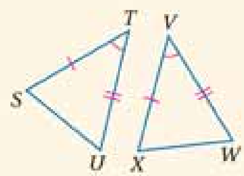
11)



12)



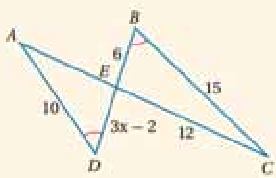
13)



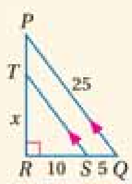
14) **عمارة:** بُني نموذج لبرج إيفل في أحد متنزهات الترفيه وكان ارتفاعه $106\frac{2}{3}$ m. فإذا كان ارتفاع برج إيفل الأصلي 320 m. فما مقياس الرسم الذي يقارن النموذج بالأصل؟ (درس 2-6)

حدد المثلثين المتشابهين في كل من السؤالين الآتيين، ثم أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المشار إليها. (درس 3-6)

15) $\overline{AE}, \overline{DE}$



16) $\overline{PT}, \overline{ST}$



6-4 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة
Parallel Lines and Proportional Parts

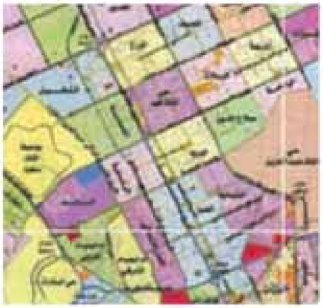
فكرة الدرس

- أستعمل الأجزاء المتناسبة للمثلثات.
- أقسم قطعة مستقيمة إلى أجزاء.

المفردات

القطعة المتصفة
midsegment

استعد



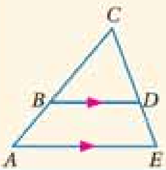
تتضمن مخططات الشوارع غالبًا خطوطًا متوازية وأخرى متعامدة. فالمخطط إلى اليسار يمثل جزءًا من مدينة الرياض، وتلاحظ فيه الشوارع متوازية أو متعامدة.

الأجزاء المتناسبة للمثلثات: القواطع غير المتوازية التي تقطع مستقيمات متوازية يمكن أن تُمدّ لتشكّل مثلثات متشابهة، لذلك تكون أضلاع المثلثات متناسبة.

النظرية 6.4 نظرية التناسب للمثلث

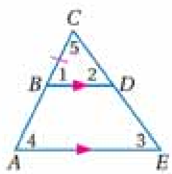
إذا وازى مستقيم ضلعًا من أضلاع مثلث وقطع الضلعين الآخرين في نقطتين مختلفتين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى قطع متناسبة الأطوال.

مثال، إذا كان $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ فإن $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$.



برهان

النظرية 6.4



المعطيات: $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$

المطلوب: إثبات أن $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$

برهان حر:

بما أن $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$، فإن $\angle 1 \cong \angle 4$، و $\angle 2 \cong \angle 3$ لأنها زوايا متناظرة.

وبناءً على التشابه بـ AA يكون $\triangle ACE \sim \triangle BCD$. ومن تعريف المضلعات المتشابهة يكون $\frac{CA}{CB} = \frac{CE}{CD}$.

ومن مسلمة جمع القطع المستقيمة يكون $CA = BA + CB$ و $CE = DE + CD$. وبالتعويض بدلاً من CA و CE في التناسب السابق ينتج:

$$\frac{BA + CB}{CB} = \frac{DE + CD}{CD}$$

$$\frac{BA}{CB} + \frac{CB}{CB} = \frac{DE}{CD} + \frac{CD}{CD}$$ بتجزئة الطرفين.

$$\frac{BA}{CB} + 1 = \frac{DE}{CD} + 1$$ لأن $\frac{CB}{CB} = 1$ و $\frac{CD}{CD} = 1$

$$\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$$ بطرح 1 من الطرفين.

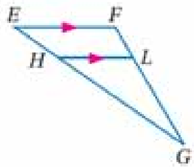
إرشادات

المثلثات المتداخلة

انسخ صورتين للمثلث ACE. قص إحداهما على طول $\overline{BD}$ لتشكل $\triangle BCD$. المثلثان $\triangle ACE$ و $\triangle BCD$ غير متداخلين. ضع المثلثين بوضع تتقابل فيه الأضلاع المتناظرة والزوايا المتناظرة.

مثال — إيجاد طول ضلع

1 في $\triangle EFG$، $\overline{HL} \parallel \overline{EF}$، $HG = 21$ ، $EH = 9$ و $FL = 6$، فأوجد LG.



من نظرية التناسب للمثلث يكون $\frac{EH}{HG} = \frac{FL}{LG}$

وبتعويض القياسات المعلومة $\frac{9}{21} = \frac{6}{LG}$

$9(LG) = (21)6$ بالضرب التبادلي

$9(LG) = 126$ بالضرب

$LG = 14$ بقسمة الطرفين على 9

تحقق من فهمك

1) في $\triangle EFG$، $FL = 4$، $EH = 6$ و $LG = 18$، فأوجد HG.

إرشادات

استعمال الكسور

يمكنك أيضًا إعادة كتابة $\frac{9}{21}$ بصورة $\frac{3}{7}$. استعمل معلوماتك عن الكسور لإيجاد المقام المجهول.

$\times 2$

$\frac{3}{7} = \frac{6}{?}$

$\times 2$

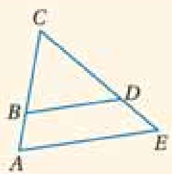
فالمقام يساوي 14.

ويمكن أن تستعمل العناصر المتناسبة لمثلث لإثبات عكس النظرية 6.4.

النظرية 6.5 — عكس نظرية التناسب للمثلث

إذا قطع مستقيم ضلعين لمثلث وقسمهما إلى قطع مستقيمة، الأطوال المتناظرة منها متناسبة، فإن المستقيم يوازي الضلع الثالث للمثلث.

مثال، إذا كان $\frac{DE}{CD} = \frac{BA}{CB}$ فإن $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.



سوف تبرهن النظرية 6.5 السؤال 42.

مثال — تحديد المستقيمات المتوازية

2 في $\triangle HKM$ إذا كان $HN = 10$، $HM = 15$ وطول $\overline{HJ}$ مثلي طول $\overline{JK}$ فحدد إذا كان $\overline{MK} \parallel \overline{NJ}$ أم لا. وبرر إجابتك.

$HM = HN + NM$ مسلمة جمع القطع المستقيمة

$15 = MN + 10$ لأن، $HM = 15, HN = 10$

$5 = MN$ بطرح 10 من الطرفين

ولإثبات أن $\overline{MK} \parallel \overline{NJ}$، يجب أن يكون $\frac{HN}{NM} = \frac{HJ}{JK}$

$\frac{HN}{NM} = \frac{10}{5} = 2$ افرض أن $JK = x$، فيكون $HJ = 2x$. إذن، $\frac{HJ}{JK} = \frac{2x}{x} = 2$

لذلك، $\frac{HN}{NM} = \frac{HJ}{JK} = 2$ وبما أن الأضلاع متناسبة في الطول، فإن $\overline{MK} \parallel \overline{NJ}$

تحقق من فهمك

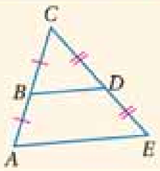
2) في $\triangle HKM$، طول $\overline{NM}$ نصف طول $\overline{NH}$ ، $HJ = 10$، و $JK = 6$، فحدد إذا كان $\overline{MK} \parallel \overline{NJ}$ أم لا.

القطعة المنصِّفة لمثلث هي قطعة مستقيمة طرفاها نقطتا منتصف ضلعين في المثلث.

النظرية 6.6 نظرية القطعة المنصفة للمثلث

القطعة المنصِّفة للمثلث توازي ضلعًا للمثلث، وطولها نصف طوله.

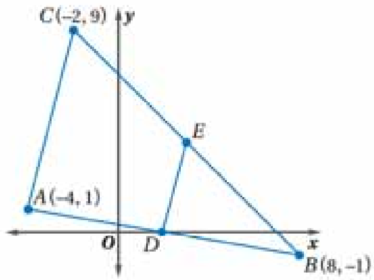
مثال، إذا كانت B و D نقطتي منتصف $\overline{AC}$ و $\overline{EC}$ على الترتيب فإن، $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ و $BD = \frac{1}{2}AE$.



سوف تبرهن النظرية 6.6 في السؤال 43.

مثال القطعة المنصّفة للمثلث

3 رؤوس $\triangle ABC$ هي: $A(-4, 1)$,$B(8, -1)$,$C(-2, 9)$ و $\overline{DE}$ قطعة منصّفة للمثلث ABC.



a) أوجد إحداثيات النقطتين D و E.

واستعمل قانون نقطة المنتصف لإيجاد نقطتي منتصف $\overline{AB}$ و $\overline{CB}$.

$$D\left(\frac{-4+8}{2}, \frac{1+(-1)}{2}\right) = D(2, 0)$$

$$E\left(\frac{-2+8}{2}, \frac{9+(-1)}{2}\right) = E(3, 4)$$

b) تحقق من أن $\overline{AC}$ توازي $\overline{DE}$.

إذا كان ميلا $\overline{AC}$ و $\overline{DE}$ متساويين، فإن $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$.

$(\overline{AC}$ ميل$)$ $\frac{1-9}{(-4)--2} = 4$ ، $(\overline{DE}$ ميل$) = \frac{0-4}{2-3} = 4$

ولأن الميلين متساويان، فإن $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$.

c) تحقق من أن $DE = \frac{1}{2}AC$.

استعمل قانون المسافة لإيجاد AC و DE.

$$DE = \sqrt{(3-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$AC = \sqrt{[-2-(-4)]^2 + (9-1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$\frac{DE}{AC} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{68}} = \sqrt{\frac{17}{68}} = \frac{1}{2}$$

إذن، $DE = \frac{1}{2}\ AC$

إرشادات

مراجعة

تذكر قانوني الميل والمسافة بين نقطتين في المستوى.

تحقق من فهمك

رؤوس $\triangle JKL$ هي $J(2, 5), K(-4, -1), L(6, -3)$. $\overline{MN}$ قطعة منصفة للمثلث JKL وتوازي $\overline{KL}$.

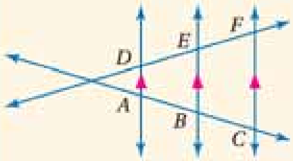
3A) أوجد إحداثيات كل من M و N.

3B) تحقق من أن $\overline{KL} \parallel \overline{MN}$.

3C) تحقق من أن $MN = \frac{1}{2}\ KL$.

تقسيم قطع مستقيمة تناسبيًا: رأينا أن المستقيمين المتوازيين يقسمان ضلعي مثلث إلى أجزاء متناسبة. وبالمثل، كل ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر تقسم أي قاطعين إلى أجزاء متناسبة. وإذا كانت النسبة تساوي 1، فإن المستقيمات المتوازية تقسم القاطعين إلى أجزاء متطابقة.

نتائج



6.1 إذا قطع قاطعان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أجزاء القاطعين تكون متناسبة.

مثال: إذا كان $\overleftrightarrow{FC} \parallel \overleftrightarrow{EB} \parallel \overleftrightarrow{DA}$، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$،

6.2 إذا قطع قاطع ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، وكانت أجزاؤه متطابقة، فإن أجزاء أي قاطع آخر لها تكون متطابقة.

مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، فإن $\overline{DE} \cong \overline{EF}$

وسوف تبرهن النتيجتان 6.1 و 6.2 في السؤالين 40 و 41 على الترتيب.

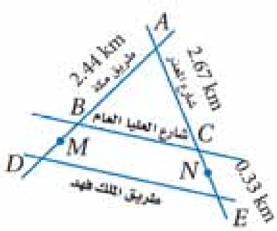
إرشادات

ثلاثة مستقيمات متوازية

النتيجة **6.1** حالة خاصة من النظرية **6.4**. وفي بعض الرسوم لا يظهر المستقيمان القاطعان ملتقيين. ولكنهما إذا مدا فسيلتقيان، وعندها يشكّلان مثلثًا مع كل مستقيم من المستقيمات المتوازية.

مثال: القطع المتناسبة

4 **إذا علمت أن طريق الملك فهد وشارع العليا العام في مدينة الرياض متوازيان ويقطعان طريق مكة وشارع المعذر، فأوجد المسافة بين التقاطعين B و D.**



يمكن رسم مستقيم موازٍ لطريق الملك فهد وتطبيق النتيجة 6.1 لنجد أن

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$$

$$\frac{2.44}{BD} = \frac{2.67}{0.33} \quad \text{بالتعويض}$$

$$2.67\,(BD) = 2.44\,(0.33) \quad \text{بالضرب التبادلي}$$

$$2.67\,(BD) = 0.8052 \quad \text{بالتبسيط}$$

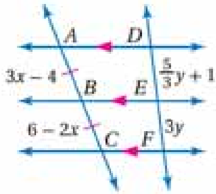
$$BD \approx 0.30 \text{ km} \quad \text{بقسمة الطرفين على } 2.67$$

تحقق من فهمك

4) إذا رسمنا مستقيمًا $\overleftrightarrow{MN}$ بحيث يوازي شارع العليا العام، وكانت $\overline{DM} \cong \overline{BM}$، فما العلاقة بين $\overline{EN}$ و $\overline{CN}$؟

مثال: القطع المتطابقة

5 أوجد قيمة كل من x و y.



لإيجاد قيمة x:

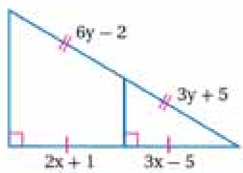
$AB = BC$	معطى
$3x - 4 = 6 - 2x$	بالتعويض
$5x - 4 = 6$	بإضافة $2x$ إلى الطرفين
$5x = 10$	بإضافة 4 إلى الطرفين
$x = 2$	بقسمة الطرفين على 5

ولإيجاد قيمة y:

$\overline{DE} \cong \overline{EF}$	المستقيمات المتوازية التي تقطع قطعًا مستقيمة متطابقة من قاطع، تقطع قطعًا مستقيمة متطابقة من أي قاطع آخر.
$DE = EF$	تعريف القطع المستقيمة المتطابقة
$3y = \frac{5}{3}y + 1$	بالتعويض
$9y = 5y + 3$	بضرب الطرفين في 3
$4y = 3$	بطرح $5y$ من الطرفين
$y = \frac{3}{4}$	بقسمة الطرفين على 4

تحقق من فهمك

5) أوجد قيمة كل من x و y.

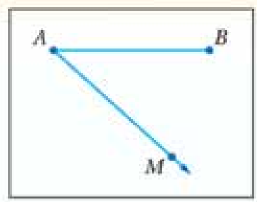


لا يمكن تقسيم قطعة مستقيمة إلى ثلاثة أجزاء متطابقة برسم أعمدة منصِّفة. ولعمل ذلك تستعمل المستقيمات المتوازية ونظريات التشابه الواردة في هذا الدرس. ويمكن اتباع هذا الأسلوب لتقسيم قطعة مستقيمة لأي عدد من الأجزاء المتطابقة.

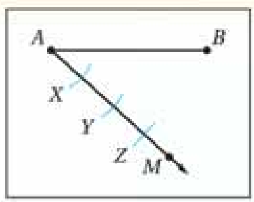
إنشاءات هندسية

تقسيم قطعة مستقيمة إلى ثلاثة أجزاء متطابقة

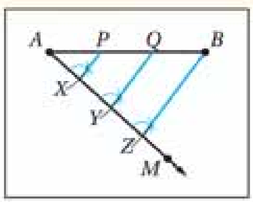
الخطوة 1 ارسم $\overline{AB}$ المطلوب تقسيمها، ثم ارسم $\overrightarrow{AM}$.



الخطوة 2 ثبت الفرجار عند A، وارسم قوسا يقطع $\overrightarrow{AM}$ في X. استعمل فتحة الفرجار نفسها لرسم $\overline{XY}$ و $\overline{YZ}$ مطابقتين لـ $\overline{AX}$.



الخطوة 3 ارسم $\overline{ZB}$، ثم ارسم مستقيمين من Y و X موازيين لـ $\overline{ZB}$. وسمِّ نقطتي تقاطعهما مع $\overline{AB}$ بـ P و Q.

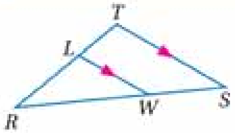


نتيجة، بما أن المستقيمات المتوازية قطعت قطعًا مستقيمة متطابقة من المستقيم القاطع $\overrightarrow{AM}$، فإن $\overline{AP} \cong \overline{PQ} \cong \overline{QB}$.

تأكد

مثال 1 (ص 96)

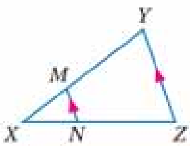
ارجع إلى $\triangle RST$ لحل السؤالين 2 ، 1.



1) إذا كان $RL = 5, RT = 9, WS = 6$, فأوجد RW.

2) إذا كان $TR = 8, LR = 3, RW = 6$, فأوجد WS.

ارجع إلى $\triangle XYZ$ لحل السؤالين 4 ، 3.

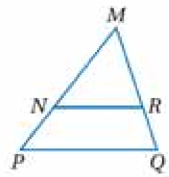


3) إذا كان $XM = 4, XN = 6, NZ = 9$, فأوجد XY.

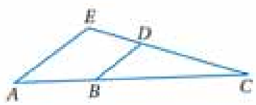
4) إذا كان $XN = t - 2, NZ = t + 1, XM = 2, XY = 10$, فأوجد t.

مثال 2 (ص 96)

5) في $\triangle MQP$, $MP = 25, MN = 9$, $MQ = 12.5, MR = 4.5$. حدد ما إذا كان $\overline{RN} \parallel \overline{QP}$ أم لا. وبرر إجابتك.



6) في $\triangle ACE$، $ED = 8, DC = 20, BC = 25$ و $AB = 12$. حدد إذا كان $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ أم لا. وبرر إجابتك.



مثال 3 (ص 97)

هندسة إحداثية: استعمل المعلومات الآتية لحل الأسئلة 9-7:

رؤوس $\triangle ABC$ هي $C(10, 0)$, $B(-4, 0)$, $A(-2, 6)$، $\overline{DE}$ قطعة منصفة توازي $\overline{BC}$.

7) أوجد إحداثيات D و E.

8) تحقق من أن $\overline{DE}$ توازي $\overline{BC}$.

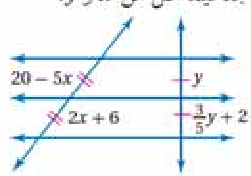
9) تحقق من أن $DE = \frac{1}{2}BC$.

مثال 4 (ص 98)

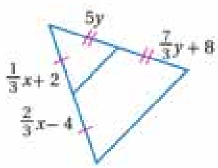
10) خرائط: المسافة من مدخل الحديقة إلى طريق المشاة على امتداد الطريق المرصوف 880 m. إذا كان طريق المشاة يوازي الطريق الترابي، فأوجد المسافة من مدخل الحديقة إلى طريق المشاة على امتداد منطقة الأشجار.

مثال 5 (ص 99)

11) أوجد قيمة كل من x و y.



12) أوجد قيمة كل من x و y.

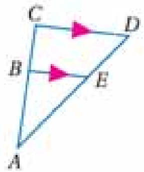


تمارين ومسائل

للأسئلة	انظر الأمثلة
13–19	1
20–23	2
24–27	3
28–31	4
32, 33	5

مساعدة الواجب المنزلي

ارجع إلى $\triangle ACD$ لحل الأسئلة 13-15:

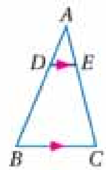


13) أوجد ED إذا كان $AE = 9$, $AB = 6, BC = 4$.

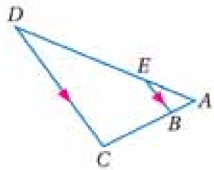
14) أوجد AE إذا كان $ED = 5$, $AB = 12, AC = 16$.

15) أوجد CD إذا كان $BE = 6$, $AE = 8$, $ED = 4$.

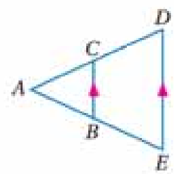
16) إذا كان $DB = 24, AE = 3$, $EC = 18$، فأوجد AD.



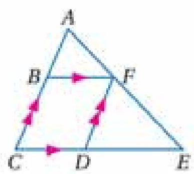
17) أوجد قيمة x و ED إذا كان $AE = 3, AB = 2$, $ED = 2x - 3, BC = 6$.



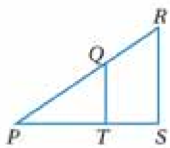
18) أوجد x, AC, CD إذا كان. $AC = x - 3, BE = 20, AB = 16,$ $CD = x + 5$.



19) أوجد DE, BC, FE, CD إذا كان $AB = 6$ $AF = 8, BC = x, CD = y, DE = 2y - 3$. $FE = x + \frac{10}{3}$



حدد إذا كان $\overline{RS} \parallel \overline{QT}$ أم لا في كل من الحالات الآتية أم لا، وبرر إجابتك:



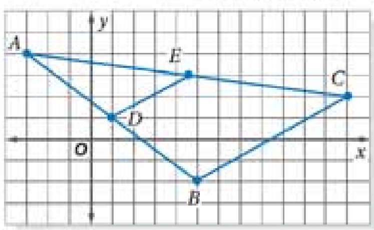
20) $PR = 30, PQ = 9, PT = 12, PS = 18$

21) $QR = 22, RP = 65$ ، SP ثلاثة أمثال TS.

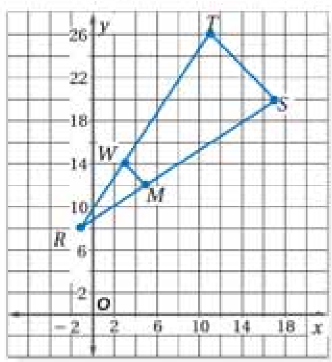
22) $TS = 8.6, PS = 12.9$ ، PQ نصف RQ.

23) $PQ = 34.88, RQ = 18.32, PS = 33.25, TS = 11.45$

24) هندسة إحداثية: أوجد طول $\overline{BC}$ إذا كان $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$، وكانت $\overline{DE}$ قطعة منصّفة للمثلث $\triangle ABC$.

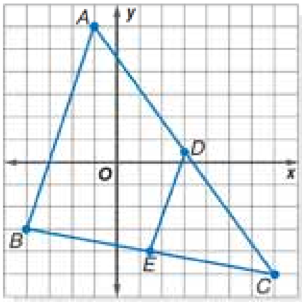


25) هندسة إحداثية: بين أن $\overline{WM} \parallel \overline{TS}$، وحدد إذا كانت $\overline{WM}$ قطعة منصّفة أم لا.



هندسة إحداثية: استعمل المعلومات الآتية لحل السؤالين 27 ، 26.

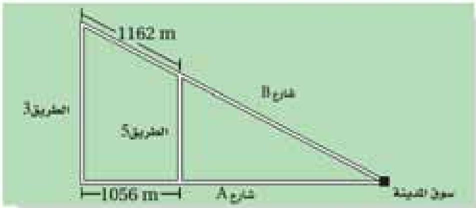
رؤوس $\triangle ABC$ هي: $A(-1, 6), B(-4, -3), C(7, -5)$، و $\overline{DE}$ قطعة منصّفة.



26) تحقق من أن $\overline{DE}$ توازي $\overline{AB}$.

27) تحقق من أن $DE = \frac{1}{2} AB$.

28) **خرائط:** ارجع إلى الخريطة عن اليسار. الطريق 3 والطريق 5 متوازيان. إذا كانت المسافة من الطريق 3 إلى سوق المدينة على امتداد شارع A تساوي 3201 m فأوجد المسافة بين الطريق 5 إلى سوق المدينة على امتداد شارع B مقربة إلى أقرب عُشر.

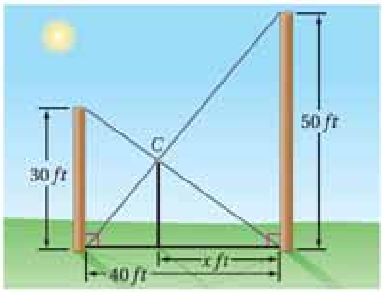


الربط مع واقع الحياة

في الطرق الحديثة لرسم الخرائط تستعمل صور تؤخذ من الفضاء لتخرج لتمثيلات دقيقة على الورق.

ففي فبراير من عام 2000 جمع رواد الفضاء في المركبة Endeavor تريليون صورة رادار شملت 46 مليون ميل مربع من سطح الأرض.

إنشاءات: استعمل المعلومات الآتية والرسم إلى اليسار لحل الأسئلة 29-31 .



ساريتان طولاهما 30 ft و 50 ft، عموديتان على سطح الأرض، والمسافة بينهما 40 ft. دُعمت الساريتان بأسلاك تمتد من قمة كل سارية إلى قاعدة السارية الأخرى، كما في الصورة، فتقاطع السلكان عند النقطة C.

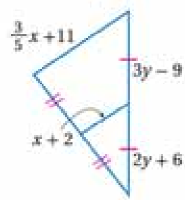
29) أوجد المسافة x، من النقطة مسقط C إلى السارية الطويلة.

30) ما ارتفاع النقطة C عن سطح الأرض.

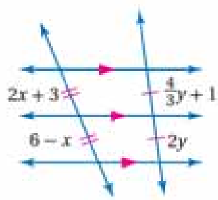
31) أوجد طول السلك من قمة السارية القصيرة إلى النقطة C؟

أوجد قيمة كل من x و y.

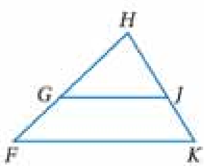
32)



33)



أوجد قيمة x لتكون $\overline{EK} \parallel \overline{GJ}$ في الأسئلة من 34-36:



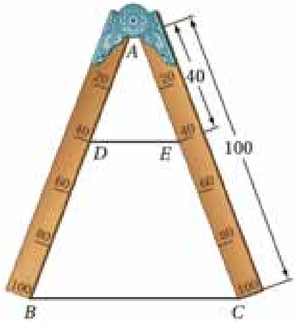
34) $GE = 12, HG = 6, HJ = 8, JK = x - 4$

35) $HJ = x - 5, JK = 15, EG = 18, HG = x - 4$

36) $GH = x + 3.5, HJ = x - 8.5, EH = 21, HK = 7$

37) **هندسة إحداثية:** إذا كانت $A(2, 12)$ و $B(5, 0)$، فأوجد إحداثيي النقطة P التي تقسم $\overline{AB}$ إلى جزأين، النسبة بين طوليهما 2:1.

38) **هندسة إحداثية:** في $\triangle LMN$، $\overline{PR}$ تقسم $\overline{NL}$ و $\overline{MN}$ تناسبيًا.
إذا كانت $N(8, 20), P(11, 16), R(3, 8)$ وكان $\frac{LP}{PN} = \frac{2}{1}$ ، فأوجد إحداثيات L و M.



39) **تاريخ الرياضيات:** الفرجار أداة قياس وحسابات صمّمها جاليلو في القرن السادس عشر. ولرسم قطعة مستقيمة طولها يعادل خمسي طول قطعة معطاة، اجعل نهايتي ساقي الفرجار عند طرفي القطعة المعطاة، ثم ارسم قطعة عند العلامة 40 على ساقي الفرجار. واكتب تبريرًا يبين لماذا يستعمل الفرجار لقياسات متناسبة.

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكل من النتيجتين الآتيتين:

40) النتيجة 6.1

41) النتيجة 6.2

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل من النظريتين الآتيتين:

42) النظرية 6.5

43) النظرية 6.6

إنشاءات: ارسم كل قطعة مستقيمة مما يلي بحسب التعليمات:

44) قطعة مستقيمة طولها 8 cm مقسّمة إلى ثلاث قطع متطابقة.

45) قطعة مستقيمة مقسّمة إلى أربع قطع متطابقة.

46) قطعة مستقيمة مقسّمة إلى قطعتين النسبة بين طوليهما 1 إلى 4.

47) **تبرير:** اشرح كيف يمكنك معرفة أن المستقيم الذي يقطع ضلعي مثلث يوازي الضلع الثالث.

مسائل مهارات التفكير العليا

48) **مسألة مفتوحة:** ارسم قطعتين مستقيمتين يقطعهما ثلاثة مستقيمات بحيث تكون الأجزاء متناسبة، ثم ارسم مثالًا مضادًّا.

49) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.
المعطيات: $AB = 4, BC = 4, CD = DE$
المطلوب: إثبات أن $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$

50) **تحدٍّ:** انسخ الشكل الوارد مع النتيجة 6.1 في صفحة 98.
وارسم $\overline{DC}$. سمّ نقطة تقاطع $\overline{DC}$ و $\overline{BE}$ بالحرف G. باستعمال تلك القطعة المستقيمة، وضح كيف يمكنك إثبات أن $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

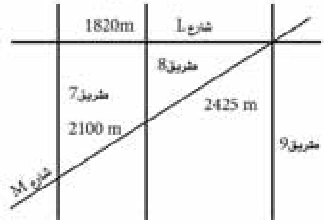
تحدٍّ: ارسم شكلاً رباعيًّا $ABCD$ في مستوى إحداثي، ولتكن النقاط E, F, G, H منصّفات $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ على الترتيب.

51) صل نقاط المنتصفات لتكوّن الشكل الرباعي $EFGH$. واذكر ما تعرفه عن أضلاع الشكل الرباعي $EFGH$.

52) هل يصلح التبرير الذي استعملته في حالة المضلع الخماسي؟ وضح إجابتك.

53) **اكتب:** ارجع إلى المعلومات عن تخطيط المدن في الصفحة 95، واذكر الحقائق الهندسية التي يحتاجها مخططو المدن لتبرير لماذا تكون المسافة المقيسة بين طريق الملك فهد وشارع العليا العام عبر شارع المعذر أطول منها عبر طريق مكة.

54) الطرق 7,8,9 متوازية، وتتقاطع مع الشارعين L و M.

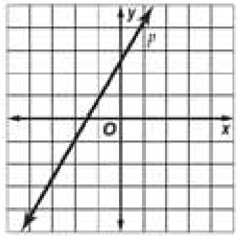


فإذا كانت هذه الشوارع جميعها قطعًا مستقيمة، فما طول الشارع L بين الطريقين 7 و 9؟

A 2101.7m **C** 3921.7m

B 2145m **D** 4436m

55) **مراجعة** ماذا سيحدث لميل المستقيم p إذا دوّر بحيث يبقى المقطع الصادي كما هو ويزداد المقطع السيني؟



F سيتغير الميل من سالب إلى موجب

G سيصبح الميل صفرًا.

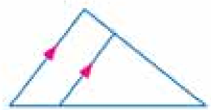
H سينقص الميل

J سيزداد الميل

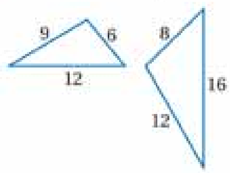
مراجعة تراكمية

حدد إذا كان كل زوج من المثلثات في الأسئلة الآتية متشابهين أم لا، وبرر إجابتك: (درس 3-6)

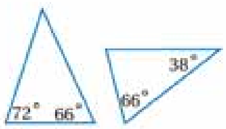
56)



57)

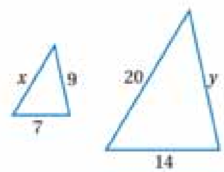


58)

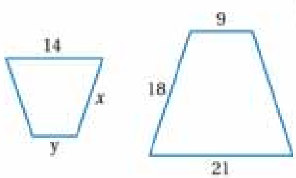


أوجد قيمة كل من x و y إذا كان كل زوج من المضلعات في السؤالين الآتيين متشابهين: (درس 2-6)

59)



60)



61) **جبر** محيط الشكل الرباعي $ABCD$ يساوي 95 cm. أوجد طول كل ضلع إذا كان $AB = 3a + 2, BC = 2(a - 1), CD = 6a + 4, AD = 5a - 5$ (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية، اكتب أزواج الأجزاء المتناظرة جميعها لكل مثلثين متطابقين في الأسئلة الآتية: (درس 3-3)

62) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

63) $\triangle RST \cong \triangle XYZ$

64) $\triangle PQR \cong \triangle KLM$

6-5 عناصر المثلثات المتشابهة
Parts of Similar Triangles

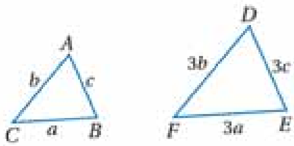
فكرة الدرس

- أتعرف علاقات التناسب للمحيطات المتناظرة في المثلثات المتشابهة وأستعملها.
- أتعرف علاقات التناسب لمنصفات الزوايا المتناظرة والارتفاعات والقطع المتوسطة في المثلثات المتشابهة وأستعملها.

استعد

يستعمل المصورون المحترفون أفلامًا لكاميراتهم قياس 35 mm للحصول على صور واضحة. وتكون المسافة بين عدسة الكاميرا واللوحة الزجاجية 6.16 m. فإذا كان طول الصورة على الفيلم 35 mm، فإن المثلثات المتشابهة تمكّننا من إيجاد طول اللوحة الأصلية.

المحيط: المثلث ABC يشابه المثلث DEF بمقياس الرسم 1:3 يمكنك استعمال المتغيرات ومقياس الرسم للمقارنة بين محيطي المثلثين. فإذا كانت أطوال أضلاع $\triangle ABC$ هي a, b, c، فإن أطوال أضلاع $\triangle DEF$ المناظرة تساوي $3a, 3b, 3c$.



$$\frac{\text{محيط } \triangle ABC}{\text{محيط } \triangle DEF} = \frac{a+b+c}{3a+3b+3c} = \frac{1(a+b+c)}{3(a+b+c)} = \frac{1}{3}$$

أيْ أن النسبة بين محيطي المثلثين هي النسبة نفسها بين أطوال أضلاع الشكلين المتشابهين. وهذه النتيجة تقودنا إلى النظرية 6.7، وهي نظرية تناسب محيطين.

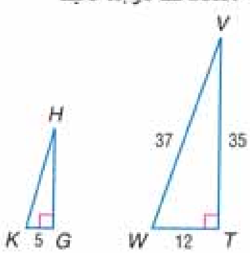
النظرية 6.7 — نظرية تناسب المحيطين

إذا كان المثلثان متشابهين، فإن النسبة بين محيطيهما تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

وسوف تبرهن النظرية 6.7 في السؤال 14.

مثال — محيطا مثلثين متشابهين

1 إذا كان $\triangle GHK \sim \triangle TVW, TV = 35, VW = 37, WT = 12, KG = 5$, فأوجد محيط $\triangle GHK$.



محيط $\triangle TVW$ يساوي $84 = 35 + 37 + 12$.

استعمل التناسب لإيجاد محيط $\triangle GHK$.

افرض أن x يمثل محيط $\triangle GHK$

$$\frac{KG}{WT} = \frac{\text{محيط } \triangle GHK}{\text{محيط } \triangle TVW}$$ نظرية تناسب المحيطين

$$\frac{5}{12} = \frac{x}{84}$$ بالتعويض

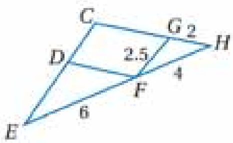
$$12x = 420$$ بالضرب التبادلي

$$x = 35$$ بقسمة الطرفين على 12

إذن، محيط $\triangle GHK$ يساوي 35 وحدة

تحقق من فهمك

1) إذا كان $\triangle DEF \sim \triangle GFH$ فأوجد محيط $\triangle DEF$.

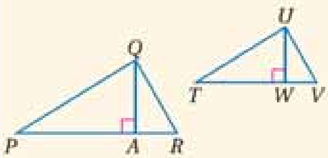


قطع مستقيمة خاصة بالمثلثين المتشابهين: فكّر في مثلث رُسم على ورقة ثم وضعت على آلة تصوير لتكبيرها أو تصغيرها، ستجد الصورة مشابهة للمثلث الأصلي. افرض أنك رسمت قطعًا مستقيمة خاصة مثل الارتفاع أو القطعة المتوسطة أو منصّف الزاوية للمثلث الأصلي، وعندما كبّرت المثلث الأصلي أو صغّرته، فإن هذه القطع ستكبّر أو تصغّر بالمعدّل نفسه، وهذا ما تنص عليه النظريات 6.10 - 6.8.

النظريات — القطع المستقيمة الخاصة لمثلثين متشابهين

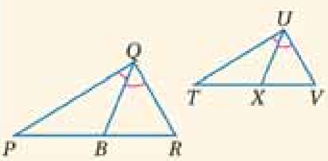
6.8 إذا تشابه مثلثان فإنّ النسبة بين طولي كل ارتفاعين متناظرين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{QA}{UW} = \frac{PR}{TV} = \frac{QR}{UV} = \frac{PQ}{TU}$$



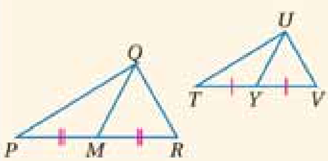
6.9 إذا تشابه مثلثان فإنّ النسبة بين طولي منصّفي كل زاويتين متناظرتين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{QB}{UX} = \frac{PR}{TV} = \frac{QR}{UV} = \frac{PQ}{TU}$$



6.10 إذا تشابه مثلثان فإنّ النسبة بين طولي كل قطعتين متوسطتين متناظرتين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{QM}{UY} = \frac{PR}{TV} = \frac{QR}{UV} = \frac{PQ}{TU}$$



سوف تبرهن النظريتان 6.8 و 6.10 في "تحقق من فهمك 2"، وفي السؤال 3 على الترتيب.

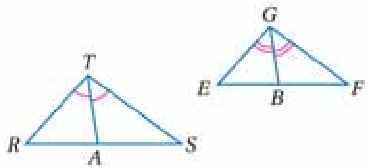
إرشادات

نقاط التلاقي

إذا كُبِّر مثلث أو صُغِّر بشكل متناسب مع المثلث الأصلي فإنّ نقط التلاقي تبقى في الموقع نفسه.

مثال — كتابة برهان

2 اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 6.9.



بما أن الزاويتين المتناظرتين اللتين نُصِّفَتا تمّ اختيارهما عشوائيًّا، فإنه لا ضرورة لإثبات ذلك لكل زوج من منصّفات الزوايا.

المعطيات: $\triangle RTS \sim \triangle EGF$

$\overline{TA}$ و $\overline{GB}$ منصّفا زاويتين.

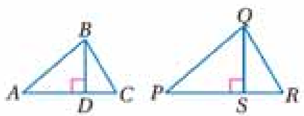
المطلوب: إثبات أن $\frac{TA}{GB} = \frac{RT}{EG}$

برهان حر:

بما أن الزوايا المتناظرة لمثلثين متشابهين تكون متطابقة، فإنّ $\angle R \cong \angle E$ ، $\angle RTS \cong \angle EGF$.
ولأنه تم تنصيف $\angle RTS$ و $\angle EGF$، فإن $\frac{1}{2}m\angle RTS = \frac{1}{2}m\angle EGF$، أو $m\angle RTA = m\angle EGB$.
يكون $\angle RTA \cong \angle EGB$ و $\triangle RTA \sim \triangle EGB$ بناءً على التشابه بـ AA. لذلك $\frac{TA}{GB} = \frac{RT}{EG}$.

تحقق من فهمك

2) اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 6.8



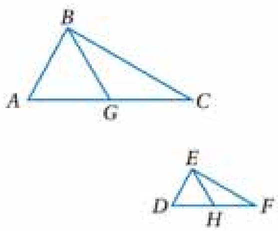
المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

المطلوب: إثبات أن $\frac{BD}{QS} = \frac{BA}{QP}$

القطع المتوسطة للمثلثات المتشابهة تكون متناسبة أيضًا.

مثال — القطع المتوسطة للمثلثات المتشابهة

3 في الشكل إلى اليسار $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. $\overline{BG}$ قطعة متوسطة في $\triangle ABC$ و $\overline{EH}$ قطعة متوسطة في $\triangle DEF$.
أوجد EH إذا كان $BC = 30, BG = 15, EF = 15$



افرض أن $EH = x$ فيكون:

$\frac{BG}{EH} = \frac{BC}{EF}$	الأضلاع المتناظرة متناسبة
$\frac{15}{x} = \frac{30}{15}$	بالتعويض
$30x = 225$	بالضرب التبادلي
$x = 7.5$	بقسمة الطرفين على 30

لذلك $EH = 7.5$.

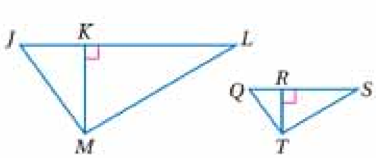
إرشادات

التناسبات

يمكن أن يكتب هذا التناسب بطرق مختلفة. فالتناسب $\frac{EH}{EF} = \frac{BG}{BC}$ يعطي النتيجة نفسها.

تحقق من فهمك

3) في الشكل إلى اليسار $\triangle JLM \sim \triangle QST$.
KM ارتفاع $\triangle JLM$ و RT ارتفاع $\triangle QST$.
أوجد RT إذا كان $JL = 12, QS = 8, KM = 5$.

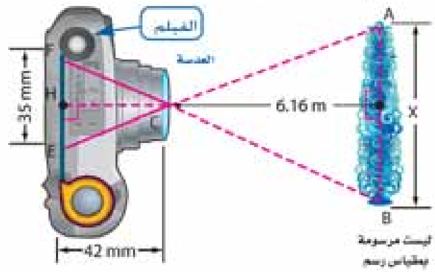


ويمكن استعمال نظريات العلاقات بين القطع الخاصة بالمثلثات المتشابهة لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال

حل مسائل على تشابه المثلثات

4 **تصوير،** بالرجوع إلى التطبيق في بداية هذا الدرس، يبين الرسم أدناه موقع الكاميرا والمسافة من عدسة الكاميرا إلى الفيلم. أوجد ارتفاع اللوحة المصوَّرة.



المثلثان ABC و EFC متشابهان. $\overline{CG}$ و $\overline{CH}$ ارتفاعان للمثلثين على الترتيب. وحسب نظرية 6.8 فإن $\frac{AB}{EF}=\frac{GC}{HC}$

$\frac{AB}{EF}=\frac{GC}{HC}$	تناسب الارتفاعات
$\frac{x\text{ m}}{35\text{mm}}=\frac{6.16\text{m}}{42\text{mm}}$	بالتعويض
$x \cdot 42 = 35\ (6.16)$	بالضرب التبادلي
$42x = 215.6$	بالتبسيط
$x = 5.13$	

إذن، طول اللوحة 5.13m تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) **حدائق،** حديقتان بجوارهما نافورة. فإذا كانت الحديقتان تشكلان مثلثين متشابهين، فأوجد المسافة من مركز النافورة إلى الضلع الأطول في حديقة الفُلّ.

الربط مع واقع الحياة

طرحت الكاميرات الرقمية في الأسواق لأول مرة عام 1994م، وكانت دقة الوضوح 480×640 بكسل، وفي عام 2005 أمكن أخذ صورة بدرجة وضوح بلغت 4368×2912 بكسل بوساطة كاميرا مضخمة لدرجة 12.8 مليون. وهي صورة أوضح بكثير مما تعرضه معظم الحواسيب.

يقسم منصِّف زاوية في مثلث الضلع المقابل لتلك الزاوية إلى جزأين، النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين.

النظرية 6.11 — نظرية منصف الزاوية

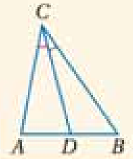
منصِّف زاوية في مثلث يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين.

مثال:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC}$$

← القطعتان المشتركتان بالرأس A

← القطعتان المشتركتان بالرأس B



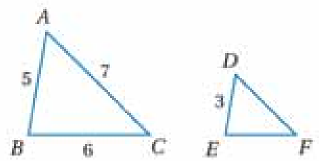
سوف تبرهن النظرية 6.11 في السؤال 15.

تأكد

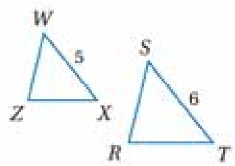
مثال 1 (ص 105)

أوجد محيط كل مثلث في السؤالين الآتيين:

1) $\triangle DEF$، إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$،
$AB = 5, BC = 6, AC = 7, DE = 3$



2) $\triangle WZX$، إذا كان $\triangle WZX \sim \triangle SRT$،
$WX = 5$ ومحيط $\triangle SRT$ يساوي 15



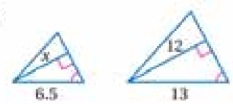
مثال 2 (ص 107)

3) اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 6.10.

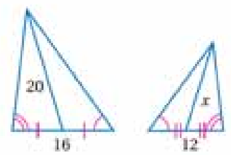
مثال 3 (ص 107)

أوجد قيمة x في كل من الأسئلة الآتية:

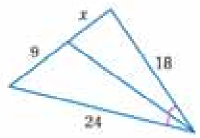
4)



5)



6)



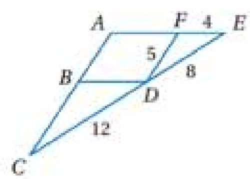
مثال 4 (ص 108)

7) **تصوير:** المسافة بين الفيلم وعدسة كاميرا تساوي 10cm، وارتفاع الصورة على الفيلم 3cm. فإذا كان طول سامح 165cm، فعلى بُعد كم سنتمترًا من الكاميرا يجب أن يقف سامح ليظهر كاملاً في الصورة؟

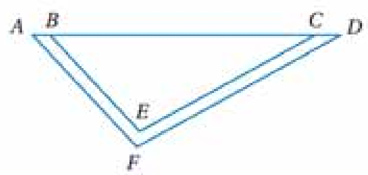
تمارين ومسائل

أوجد محيط كل مثلث في الأسئلة الآتية:

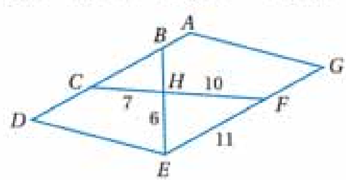
8) $\triangle BCD$، إذا كان $\triangle BCD \sim \triangle FDE$،
$CD = 12, FD = 5, FE = 4, DE = 8$



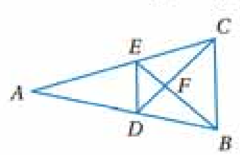
9) $\triangle ADF$، إذا كان $\triangle ADF \sim \triangle BCE$،
$BC = 24, EB = 12, CE = 18, DF = 21$



10) $\triangle CBH$، إذا كان $\triangle CBH \sim \triangle FEH$،
والشكل $ADEG$ متوازي أضلاع،
$CH = 7, FH = 10, FE = 11, EH = 6$



11) $\triangle DEF$، إذا كان $\triangle DEF \sim \triangle CBF$،
ومحيط $\triangle CBF = 27$
$DF = 6, FC = 8$

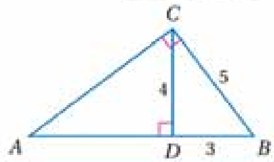


مساعدة الواجب المنزلي

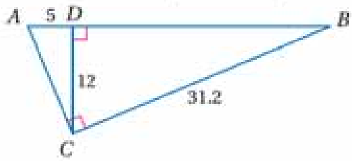
للأسئلة	انظر الأمثلة
8–13	1
14–18	2
19–22	3
23, 24	4

أوجد محيط كل مثلث في السؤالين الآتيين:

12) $\triangle ABC$، إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ ، $CB = 5$,$CD = 4$, $DB = 3$



13) $\triangle ABC$، إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ ، $AD = 5$, $CD = 12$, $BC = 31.2$



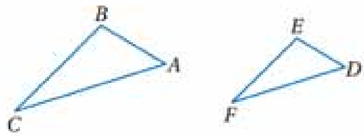
برهان: اكتب برهانًا من النوع المذكور لكل سؤال من الأسئلة 18–14:

14) اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 6.7.

المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

و $\frac{AB}{DE} = \frac{m}{n}$

المطلوب: إثبات أن $\frac{\triangle ABC \text{ محيط}}{\triangle DEF \text{ محيط}} = \frac{m}{n}$

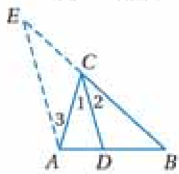


15) اكتب برهانًا ذا عمودين لنظرية منصّف الزاوية (النظرية 6.11)

المعطيات: $\overline{CD}$ تنصّف $\angle ACB$

وبالعمل $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$.

المطلوب: إثبات أن $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$



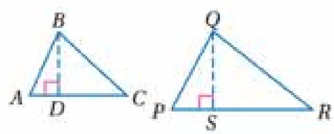
16) برهان حر

المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$،

$\overline{BD}$ ارتفاع لـ $\triangle ABC$

$\overline{QS}$ ارتفاع لـ $\triangle PQR$

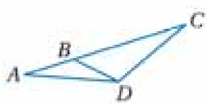
المطلوب: إثبات أن $\frac{QP}{BA} = \frac{QS}{BD}$



17) برهان متسلسل

المعطيات: $\angle C \cong \angle BDA$

المطلوب: إثبات أن $\frac{AC}{DA} = \frac{AD}{BA}$

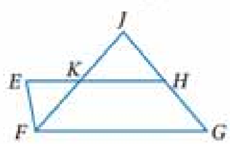


18) برهان ذو عمودين

المعطيات: $\overline{JF}$ تنصّف $\angle EFG$

$\overline{EH} \parallel \overline{FG}$, $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$

المطلوب: إثبات أن $\frac{EK}{KF} = \frac{GJ}{JF}$

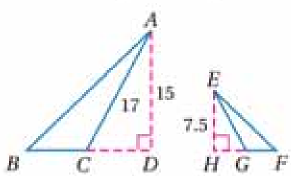


19) أوجد EG إذا كان $\triangle ACB \sim \triangle EGF$،

$\overline{AD}$ ارتفاع لـ $\triangle ACB$

$\overline{EH}$ ارتفاع لـ $\triangle EGF$

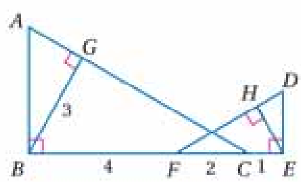
. $AC = 17$, $AD = 15$, $EH = 7.5$



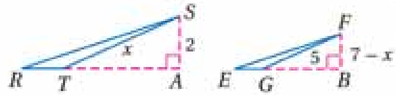
20) أوجد EH إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

$\overline{BG}$ ارتفاع لـ $\triangle ABC$ ، $\overline{EH}$ ارتفاع لـ $\triangle DEF$

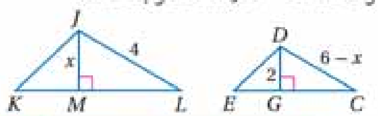
$BG = 3$, $BF = 4$, $FC = 2$, $CE = 1$



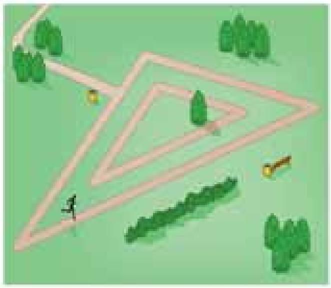
21) إذا كانت $\overline{SA}$ و $\overline{FB}$ ارتفاعين و $\triangle RST \sim \triangle EFG$، فأوجد FB.



22) إذا كانت $\overline{DG}$ و $\overline{JM}$ ارتفاعين و $\triangle KJL \sim \triangle EDC$، فأوجد DC.



23) **مضمار جري:** يحوي متنزه طريقين لرياضة الجري، مثلثي الشكل ومتشابهين كما هو مبين في الصورة.
فإذا كانت أبعاد الطريق الداخلي $300\,m$ ، $350\,m$، و $550\,m$. وطول الضلع الأقصر للطريق الخارجي $600\,m$. فهل المسافة التي سيركضها شخص على الطريق الداخلي نصف المسافة التي سيركضها على الطريق الخارجي؟ وضح إجابتك.

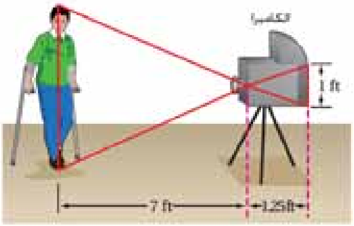


الربط مع واقع الحياة

المصورون

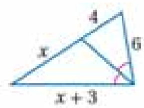
يحتاج المصورون إلى نظرة ثاقبة في التقاط الصور، كما أن موقع وزاوية التصوير لهما أثر بالغ في وضوح الصورة.

24) **تصوير:** واحدة من أوائل الكاميرات المكتشفة تسمّى الكاميرا الشمسية. وفيها يدخل الضوء من فتحة في مقدمتها وتنعكس الصورة في مؤخرتها مقلوبة رأسًا على عقب مشكّلةً مثلثين متشابهين.
فإذا كان طول صورة شخص في مؤخرة الكاميرا $1\,ft$، والمسافة من فتحة الكاميرا إلى الشخص $7\,ft$، وطول الكاميرا نفسها $1.25\,ft$. فكم طول الشخص الذي تم تصويره؟



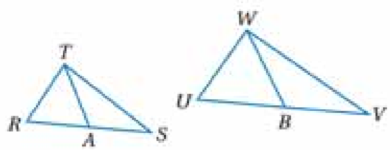
أوجد قيمة x في السؤالين الآتيين:

25)

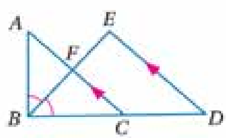


26)

27) إذا كان $\triangle RST \sim \triangle UVW$ و $\overline{WB}$ ، $\overline{TA}$ قطعتين متوسطتين، $TA = 8, RA = 3, WB = 3x - 6$، $UB = x + 2$، فأوجد UB.

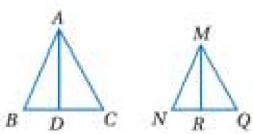


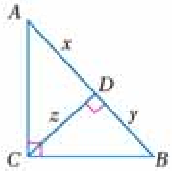
28) إذا كانت $\overline{BF}$ تنصّف $\angle ABC$ ، $\overline{AC} \parallel \overline{ED}$ ، $BA = 6, BC = 7.5 , AC = 9, DE = 9,$ فأوجد CF و BD.



مسائل مهارات التفكير العليا

29) **تبرير:** وضح ما يجب أن يكون صحيحًا حول المثلثين ABC و MNQ قبل أن تتمكن من استنتاج أن
$$\frac{AD}{MR} = \frac{BA}{NM}$$





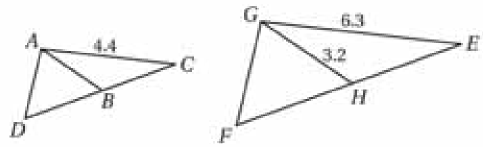
30) **تحدٍّ:** $\overline{CD}$ ارتفاع للمثلث على الوتر $\overline{AB}$.
ضع تخمينًا حول x, y, z. ووضّح تبريرك.

31) **مسألة مفتوحة:** محيط مثلث $24\,cm$، ومحيط مثلث آخر $36\,cm$، إذا كان طول ضلع في المثلث الصغير يساوي $6\,cm$، فأوجد الأعداد الصحيحة الممكنة لأطوال الأضلاع الأخرى للمثلثين ليكونا متشابهين.

32) **اكتب:** وضّح كيف ترتبط الهندسة بالتصوير، مضمنًا إجابتك رسمًا يوضح كيف تعمل الكاميرا ويبيّن الصورة والفيلم، ولماذا يكون المثلثان المتطابقا الضلعين متشابهين.

تدريب على اختبار معياري

33) في الشكل أدناه $\overline{FH} \cong \overline{HE}$ و $\overline{DB} \cong \overline{BC}$



إذا كان $\triangle ACD \sim \triangle GEF$، فأوجد الطول التقريبي لـ $\overline{AB}$.

A 2.2　　**C** 8.7

B 4.6　　**D** 11.1

34) **مراجعة:** أي مما يأتي يبيّن العدد 0.00234 مكتوبًا بالصورة العلمية؟

F 2.34×10^5　　**H** 2.34×10^{-2}

G 2.34×10^3　　**J** 2.34×10^{-3}

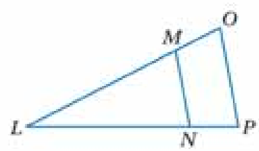
35) **مراجعة:** مجموع ثلاثة أعداد 180. اثنان منها متساويان، وكل منهما يساوي ثلث العدد الأكبر. فما العدد الأصغر؟

A 30　　**C** 45

B 36　　**D** 72

مراجعة تراكمية

حدد إذا كان $\overline{OP} \parallel \overline{MN}$ في كل من الأسئلة 38-36 أم لا، وبرر إجابتك: (درس 6-4)



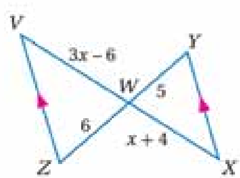
36) $LM = 7, LN = 9, LO = 14, LP = 16$

37) $LM = 6, MN = 4, LO = 9, OP = 6$

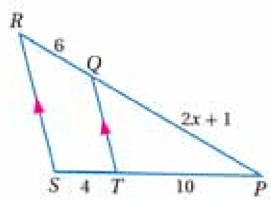
38) $LN = 12, NP = 4, LM = 15, MO = 5$

عيّن المثلثين المتشابهين، ثم أوجد قيمة x وطول كل ضلع مذكور في السؤالين الآتيين: (درس 6-3)

39) $\overline{VW}$ و $\overline{WX}$



40) $\overline{PQ}$



41) **مهن:** يتقاضى عامل أجر طلاء باب السور 25 ريالاً، و 16 ريالاً لكل ساعة عمل في طلاء جدار السور. اكتب معادلة تمثل ما سيكسبه العامل من طلاء سور له باب واحد. (درس 2-4)

توسع
6-5

معمل الهندسة

مثلث سيربنسكي
Sierpinski Triangle

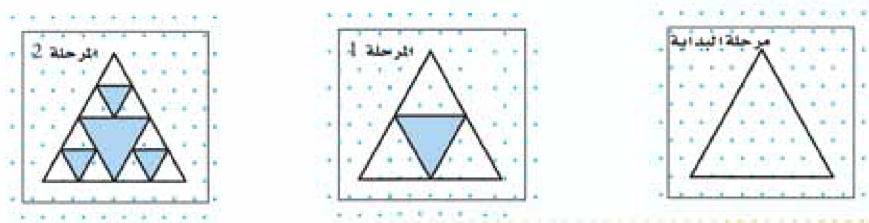
الكسريات هي أشكال هندسية تنتج باستعمال تكرار الأجزاء (iteration). **وتكرار الأجزاء** هو عملية تكرار للنمط نفسه مرة تلو الأخرى. والكسريات **ذاتية التشابه**؛ أيْ أن الأجزاء الصغيرة للشكل لها الخصائص الهندسية نفسها للشكل الأصلي.

نشاط

مرحلة البداية: ارسم على ورقة منقطة مثلثًا متطابق الأضلاع، طول كل من أضلاعه 8 وحدات.

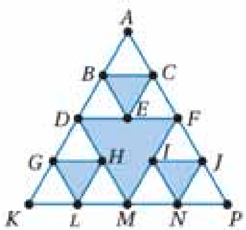
المرحلة 1: صل نقاط منتصفات أضلاع المثلث لتشكّل مثلثًا آخر، وظلّل المثلث الداخلي.

المرحلة 2: كرّر العملية مع المثلثات الثلاثة غير المظلّلة. وصل نقاط منتصفات أضلاعها لتشكّل مثلثات أخرى.



وإذا كررت هذه العملية إلى ما لا نهاية، فإن الشكل الناتج يُسمى **مثلث سيربنسكي**.

تحليل النتائج



1) أكمل حتى المرحلة 4. ما عدد المثلثات غير المظلّلة في المرحلة 4؟

2) ما محيط المثلث غير المظلّل في المراحل الخمس الأولى؟

3) إذا مضيت في هذه العملية إلى ما لا نهاية، فماذا يحصل لمحيط كل مثلث غير مظلّل؟

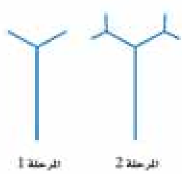
4) تأمّل $\triangle DFM$ في المرحلة 2 لمثلث سيربنسكي إلى اليسار. هل هذا المثلث متطابق الأضلاع؟ هل $\triangle BCE$ أو $\triangle GHL$ أو $\triangle IJN$ متطابق الأضلاع؟

5) هل $\triangle BCE \sim \triangle DFM$؟ برّر إجابتك.

6) كم مرة تطبق المرحلة 1 في المرحلة 2 لمثلث سيربنسكي؟

للسؤالين 7 و 8، استعمل المعلومات الآتية:

يمكن رسم شجرة كسرية بعمل غصنين جديدين من طرف كل غصن أصلي، بحيث يكون طول كل غصن منها مساويًا ثلث طول الغصن السابق له.



7) ارسم المرحلتين الثالثة والرابعة للشجرة الكسرية، وما العدد الكلي للأغصان في المراحل الأربع جميعها؟ (لا تلجأ إلى عد الأغصان).

8) أوجد نمطًا لتوقُّع عدد الأغصان في كل مرحلة.

الفصل 6

دليل الدراسة والمراجعة

المَطْوِيَاتُ مُنَظِّمُ أفكار

استعد

تأكد أنك دونت المفاهيم الأساسية في مطويتك.

مفاهيم أساسية

التناسب (الدرس 6-1)

- لكل عددين a و c ولكل عددين غير صفريين b و d يكون $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ إذا وفقط إذا كان $ad = bc$.

المضلعات المتشابهة والمثلثات المتشابهة (الدرسان 6-2 و 6-3)

- يكون المضلعان متشابهين إذا وفقط إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.
- **يكون المثلثان متشابهين إذا كانت:**

AA: زاويتان في أحدهما مطابقتين لزاويتين في المثلث الآخر.

SSS: أطوال الأضلاع المتناظرة في المثلثين متناسبة.

SAS: طولا ضلعين في أحدهما متناسبين مع طولي الضلعين المناظرين لهما في المثلث الآخر، والزاويتان المحصورتان متطابقتين.

الأجزاء المتناسبة (الدرس 6-4)

- إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع الضلعين الآخرين في نقطتين مختلفتين فإنه يقسم هذين الضلعين إلى قطع أطوالها متناسبة.
- القطعة المنصِّفة لمثلث توازي ضلعًا للمثلث، وطولها يساوي نصف طول ذلك الضلع.

عناصر المثلثين المتشابهين (الدرس 6-5)

- إذا تشابه مثلثان، فإن محيطيهما، وارتفاعيهما المتناظرين، وطول كل من منصفي الزاويتين المتناظرتين، والقطعتين المتوسطتين المتناظرتين، تكون متناسبة.

المفردات الأساسية

الضرب التبادلي (ص 71)

الطرفان (ص 71)

الوسطان (ص 71)

القطعة المنصِّفة (ص 96)

التناسب (ص 71)

النسبة (ص 70)

معامل التشابه(معامل الرسم) (ص 79)

المضلعات المتشابهة (ص 78)

اختبر مفرداتك

حدد إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة تغيّر الكلمة أو العدد الذي تحته خط لتجعل العبارة صحيحة:

1) الرمز ~ يعني "<u>مطابق</u> لـ"

2) القطعة المنصِّفة لمثلث هي قطعة مستقيمة طرفاها <u>نقطتا منتصفي ضلعين</u> للمثلث.

3) يكون المضلعان متشابهين إذا وفقط إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة وأطوال أضلاعهما المتناظرة <u>متساوية</u>.

4) AA (زاوية - زاوية) هي مسلَّمة <u>تطابق</u>.

5) <u>التناسب</u> هو مقارنة بين كميتين باستعمال القسمة.

6) إذا تشابه مثلثان فإن محيطيهما يتناسبان مع قياسات <u>الزوايا</u> المتناظرة.

7) القطعة المنصِّفة لمثلث توازي أحد أضلاع المثلث، وطولها يساوي <u>مثلي</u> طول ذلك الضلع.

8) إذا قطع مستقيم ضلعين لمثلث وقسمهما إلى قطع مستقيمة تتناسب فيها القطع المتناظرة، فإن المستقيم له <u>نصف طول</u> الضلع الثالث.

مراجعة الدروس

6-1 التناسب (الصفحات 76–70)

حلّ كلًّا من التناسبين الآتيين:

9) $\frac{x-12}{6}=\frac{x+7}{-4}$ 10) $\frac{18}{7w+5}=\frac{9}{4w-1}$

11) **مواليد** متوسط أطوال وأوزان الأطفال حديثي الولادة 70 cm و 3.46 kg على الترتيب. إذا بقي الطول والوزن متناسبين مع كل الأعمار، فكم يكون متوسط الوزن للبالغين الذين أطوالهم 177.5cm؟ وهل يبقى الطول والوزن متناسبين كلما كبر الأطفال؟ وضح إجابتك.

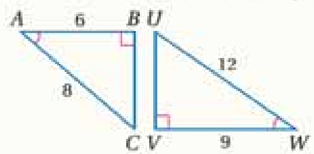
مثال 1 حل $\frac{m-13}{m+13}=\frac{21}{34}$

$\frac{m-13}{m+13}=\frac{21}{34}$	التناسب الأصلي
$34(m-13)=21(m+13)$	بالضرب التبادلي
$34m-442=21m+273$	خاصية التوزيع
$13m-442=273$	بالطرح
$13m=715$	بالجمع
$m=55$	بالقسمة

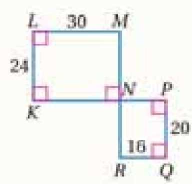
6-2 المضلّعات المتشابهة (الصفحات 86–78)

حدد إذا كان كل زوج من الأشكال في السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وبرر إجابتك:

12)

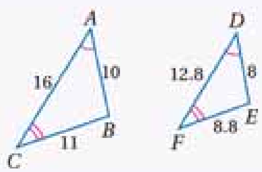


13)



14) **النظام الشمسي:** في نموذج دقيق لنظامنا الشمسي، وضعت سميرة الأرض على بعد 1 ft من الشمس، علمًا بأن المسافة الحقيقية بين الأرض والشمس 93000000 mi. إذا كانت المسافة من بلوتو إلى الشمس 3695950000 mi، فعلى أي بعد من الشمس ستضع سميرة بلوتو في نموذجها؟

مثال 2 حدد إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وبرر إجابتك:



بما أن $\angle D \cong \angle A$ و $\angle F \cong \angle C$ فإن $\angle B \cong \angle E$.

وبحسب نظرية الزاوية الثالثة فجميع الزوايا المتناظرة متطابقة.

اختبر تناسب الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{AB}{DE}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}=1.25 \quad \frac{BC}{EF}=\frac{11}{8.8}=\frac{5}{4}=1.25$$

$$\frac{CA}{FD}=\frac{16}{12.8}=\frac{5}{4}=1.25$$

إذن، فأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة. وبما أن الزوايا المتناظرة متطابقة، فإن:

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

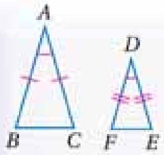
الفصل

6 دليل الدراسة والمراجعة

6-3 المثلثات المتشابهة (الصفحات 87-93)

15) قياسات غير مباشرة: لتقدير ارتفاع سارية العلم، شاهدت فاطمة قمة السارية في مرآة موضوعة على الأرض وتبعد عن السارية 21 ft. فإذا كانت فاطمة تقف على بعد 3 ft من المرآة، وارتفاع عينيها عن الأرض 5.8 ft، فكم قدمًا طول سارية العلم؟

مثال 3 حدد إذا كان المثلثان متشابهين أم لا، وبرر إجابتك.



$\triangle ABC \sim \triangle DFE$ حسب التشابه بـ SAS.

6-4 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة (الصفحات 95-104)

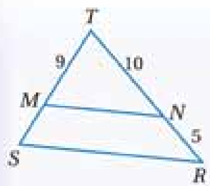
استعمل الشكل في مثال 4 لتحديد إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{SR}$ أم لا، بحسب المعلومات الواردة في كل من السؤالين الآتيين، وبرر إجابتك:

16) $TM = 21, MS = 14, RN = 9, NT = 15$

17) $SM = 10, MT = 35, TN = 28, TR = 36$

18) بيوت بيت خشبي يميل سطحه نحو الأرض. أوجد: عرض الدور الثاني x.

مثال 4 في $\triangle TRS$، $TS = 12$. حدد إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{SR}$ أم لا.



إذا كان $TS = 12$, فإن $MS = 12 - 9 = 3$.

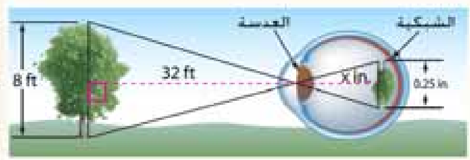
قارن بين أطوال القطع المستقيمة.

$$\frac{TM}{MS} = \frac{9}{3} = 3 \qquad \frac{TN}{NR} = \frac{10}{5} = 2$$

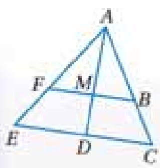
وبما أن $\frac{TN}{NR} \neq \frac{TM}{MS}$، فإن $\overline{MN} \nparallel \overline{SR}$.

6-5 عناصر المثلثات المتشابهة (الصفحات 105-112)

19) عين الإنسان: تستعمل عين الإنسان المثلثات المتشابهة لقلب الشيء وتصغيره عندما يمر خلال العدسة إلى الشبكية. فكم المسافة بين عدسة العين والشبكية؟



مثال 5 إذا كان $\overline{FB} \parallel \overline{ED}$، AD تنصف $\angle A$، $BF = 6, CE = 10$، $AD = 5$، فأوجد AM.



بما أن $\angle ACE \cong \angle ABF$ و $\angle EAC \cong \angle FAB$ فإن $\triangle ABF \sim \triangle ACE$ بحسب التشابه بـ AA.

$\frac{AM}{AD} = \frac{BF}{CE}$ تناسب المنصفات المتناظرة والأضلاع المتناظرة

$\frac{x}{5} = \frac{6}{10}$ بالتعويض

$10x = 30$ بالضرب التبادلي

$x = 3$ بالقسمة

إذن، $AM = 3$

الفصل

6 اختبار الفصل

حلّ كلاً من التناسبات الآتية:

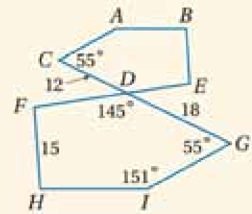
1) $\frac{x}{14} = \frac{1}{2}$

2) $\frac{4x}{3} = \frac{108}{x}$

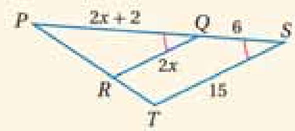
3) $\frac{k+2}{7} = \frac{k-2}{3}$

كل زوج من المضلعات في السؤالين الآتيين متشابهان. اكتب عبارة تشابه، وأوجد مقياس الرسم:

4)

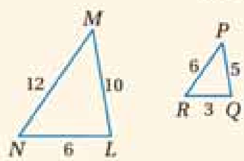


5)

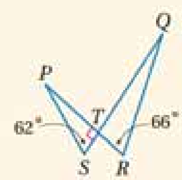


حدد إذا كان كل زوج من المثلثات في الأسئلة الآتية متشابهين أم لا، وبرر إجابتك:

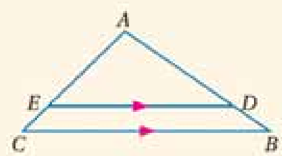
6)



7)

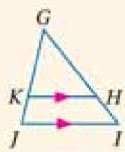


8)



9) **كرة السلة:** يريد زيد أن يقيس ارتفاع أعلى اللوح الخشبي الحامل لحلقة التسديد. وعند الساعة 4:00 كان طول ظل جدار ارتفاعه 1.4 m يساوي 60 cm وطول ظل اللوح الخشبي 1.8 m. فما ارتفاع أعلى اللوح الخشبي الحامل لحلقة التسديد؟

ارجع إلى الشكل أدناه، وأجب عن الأسئلة الآتية:



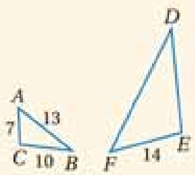
10) أوجد KJ إذا كان $HI = 4, GJ = 8, GH = 12$

11) أوجد GK إذا كان $KJ = 6, GI = 14, GH = 7$

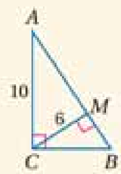
12) أوجد GI إذا كان $KJ = 4, GH = 9, GK = 6$

أوجد محيط المثلث المذكور في كل من السؤالين الآتيين:

13) $\triangle DEF$ إذا كان $\triangle DEF \sim \triangle ACB$



14) $\triangle ABC$



15) **سؤال اختيار من متعدد:** قص جابر لوح فلين مستطيل الشكل طوله 63 cm وعرضه 45 cm. وأراد أن يصنع لوحًا أصغر مشابهًا للوح الأول، فأيّ مما يأتي يمكن أن تكون أبعادًا للوح الصغير؟

A 3 cm × 4 cm　　**B** 5 cm × 7 cm

C 5 cm × 12 cm　　**D** 14 cm × 21 cm

اختبار معياري تراكمي

الفصول 1-6

أجب عن الأسئلة التالية:

1) أي مثلثين مما يأتي ليسا بالضرورة متشابهين؟

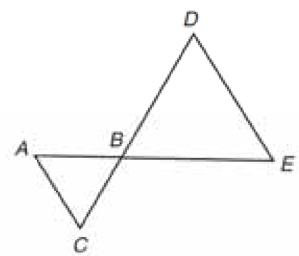
A مثلثان قائما الزاوية قياس زاوية في كل منهما $30°$.

B مثلثان قائما الزاوية قياس زاوية في كل منهما $45°$.

C مثلثان متطابقا الضلعين.

D مثلثان متطابقا الأضلاع.

2) أي الحقائق الآتية يمكن أن تكون كافية لإثبات أن المثلثين ABC و EBD متشابهان؟



A $\overline{AB} \cong \overline{EB}$

B $\overline{CB} \cong \overline{DB}$

C $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$

D $\angle D \cong \angle E$

3) النسبة بين أطوال أضلاع شكل رباعي هي 2:3:5:9 ، وطول الضلع الأطول 13.5 cm . أوجد محيط الشكل الرباعي بالسنتمترات.

4) **المعطيات،** الشكل $MNOP$ شبه منحرف متطابق الساقين قطراه $\overline{MO}$ و $\overline{NP}$. فأي عبارة مما يأتي ليست صحيحة؟

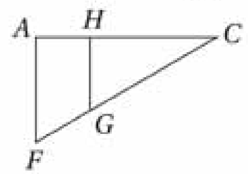
A $\overline{MO} \cong \overline{NP}$

B $\overline{NP}$ تنصف $\overline{MO}$.

C $\angle M \cong \angle N$

D $\angle O \cong \angle P$

5) أي الحقائق الآتية ليست كافية لإثبات أن المثلثين ACF و HCG متشابهان؟



A $\overline{AF} \parallel \overline{HG}$

B $\frac{AC}{HC} = \frac{FC}{GC}$

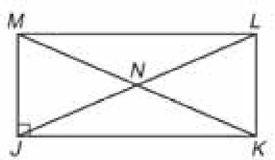
C $\frac{CG}{CF} = \frac{1}{2}$

D $\angle FAH$ و $\angle CHG$ زاويتان قائمتان.

إرشادات للاختبار

سؤال 5 في المثلثين المتشابهين تكون الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة. وعندما تعين تناسبًا تحقق من أنه يقارن بين الأضلاع المتناظرة.

6) في المستطيل $JKLM$ المبين أدناه $\overline{JL}$ و $\overline{MK}$ قطران. فإذا كان $JL = 2x + 5$ ، $KM = 4x - 11$ ، فما قيمة x ؟



7) إذا كان قياس كل زاوية خارجية لمضلع منتظم أقل من $50°$، فأي مما يأتي لا يمكن أن يكون هو المضلع؟

A عشاري (مضلع له عشرة أضلاع)

B ثماني

C سباعي

D خماسي

8) **جبر.** ما معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2, 3)$ ويكون عموديًا على $2x - y = 3$؟

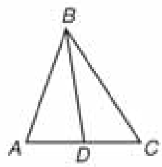
A $y = 2x - 2$

B $y = \frac{1}{2}x - 4$

C $y = -\frac{1}{2}x + 2$

D $y = -2x + 4$

9) $\overline{BD}$ قطعة متوسطة في $\triangle ABC$. إذا كان $AD = 3x + 5$ و $CD = 5x - 1$، فأوجد AC.



A 3

B 11

C 14

D 28

10) في تجربة مخبرية، سجل أحد الطلبة درجات الحرارة بالدرجات المئوية، وسجل طالب آخر درجات الحرارة نفسها بالدرجات الفهرنهايتية. فإذا رسم الطالبان رسمًا بيانيًا للدرجات المئوية باعتبارها محورًا صاديًا مقابل الفهرنهايتية باعتبارها محورًا سينيًا، فكم يكون ميل هذا الرسم؟

A $\frac{5}{9}$

B 1

C $\frac{9}{5}$

D 2

11) الشكل الرباعي $HJKL$ متوازي أضلاع. إذا كان قطراه متعامدين، فأي العبارات الآتية يجب أن تكون صحيحة؟

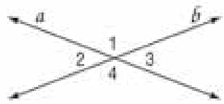
A الشكل الرباعي $HJKL$ مربع.

B الشكل الرباعي $HJKL$ معين.

C الشكل الرباعي $HJKL$ مستطيل.

D الشكل الرباعي $HJKL$ شبه منحرف متطابق الساقين.

12) إذا كانت الزاويتان $\angle 4$ و $\angle 3$ متكاملتين، فأي تبرير يمكنك استعماله كخطوة أولى في إثبات أن $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان؟



A تعريف الزاويتين المتقابلتين بالرأس

B تعريف الزاويتين المتشابهتين

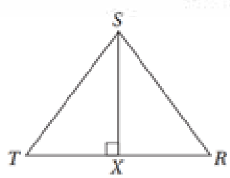
C تعريف المستقيمين المتعامدين

D خاصية القسمة

سؤال ذو مستوى متقدم

سجل إجابتك على ورقة، ووضح خطوات عملك.

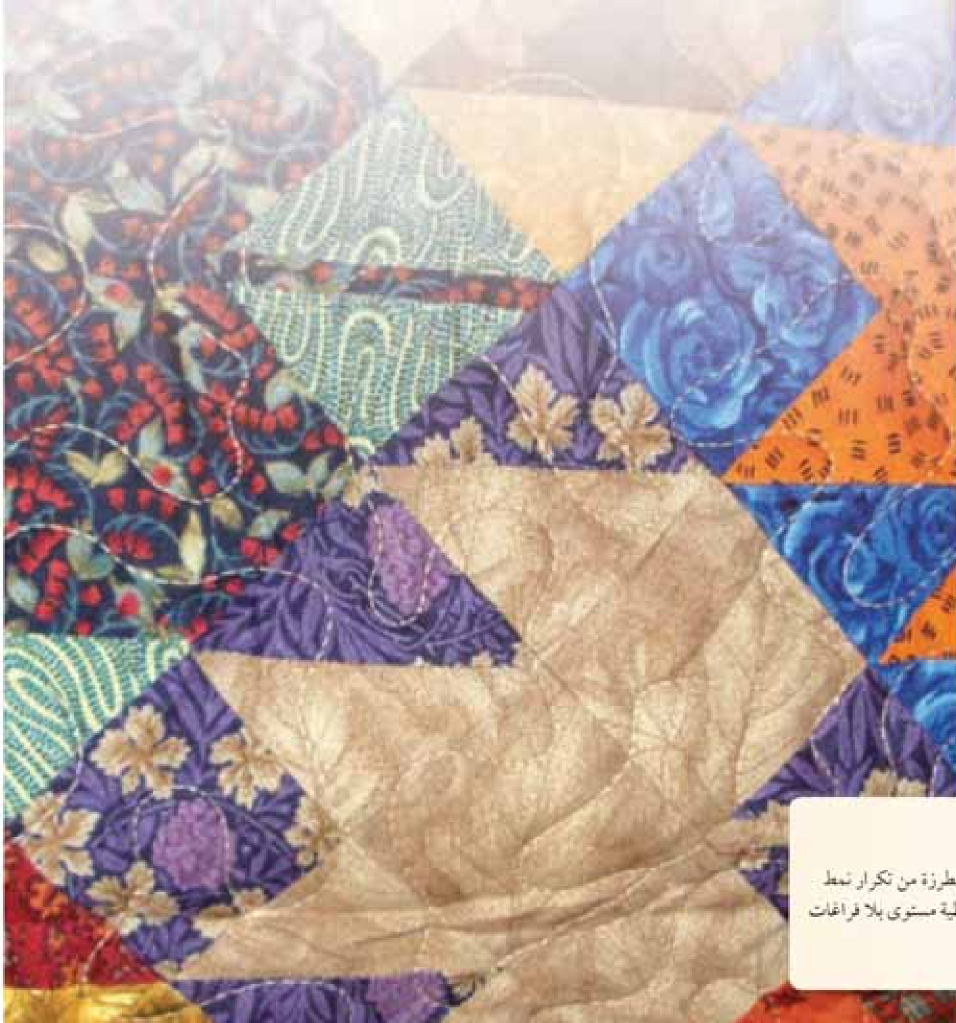
13) يلعب هاني ورياض وفيصل لعبة باستعمال الحبل، حيث يقف هاني ورياض عند النقطتين T و R ويشدان الحبل بينهما. ويقف فيصل عند النقطة S التي تبعد عن T و R بعدين متساويين. وسيقفز فيصل إلى النقطة X. أثبت أنه عندما يقفز فيصل إلى الحبل سيكون عند نقطة المنتصف بين هاني ورياض.



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تجب عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى ...	6-3	6-4	6-1	5-6	6-3	5-4	5-1	مهارة سابقة	4-1	2-3	5-5	1-7	3-6

الفصل 7

التحويلات الهندسية
Transformations



الأفكار العامة

- أتعرف الأشكال بعد إجراء عمليات الانعكاس، والإزاحة، والدوران أو التمدد، وتسميتها ورسمها.
- أتعرّف أشكالًا مختلفة من التبليط وتصميمها.

المفردات

الانعكاس (ص. 123)
reflection

الإزاحة أو الانسحاب (ص. 130)
translation

الدوران (ص. 136)
rotation

التبليط (ص. 145)
tessellation

التمدد (ص. 151)
dilaiton

الربط مع الحياة

تتكون الأنماط الظاهرة على هذه اللحف المطرزة من تكرار نمط أساسي يُسمى "اللبنة"، وتكرار هذا النمط لتغطية مستوى بلا فراغات أو تداخلات يسمى تبليطًا.

المَطْوِيَّاتُ
منظم أفكار

التحويلات الهندسية ، اعمل هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك. ابدأ بورقة واحدة.

1 **اطوِ** الورقة نصفين طوليًّا.

2 **قصّ** أحد نصفيها إلى 5 أشرطة متصلة عند خط الطيّ.

3 **اكتب** على كل شريط مفردة من مفردات هذا الفصل.

التهيئة للفصـــل 7

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي. ارجع إلى «المراجعة السريعة» لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

ارسم كل زوج من أزواج النقاط التالية: (مهارة سابقة).

1) $A(1, 3), B(-1, 3)$

2) $C(-3, 2), D(-3, -2)$

3) $E(-2, 1), F(-1, -2)$

4) $G(2, 5), H(5, -2)$

5) $J(-7, 10), K(-6, 7)$

خرائط: استعمل الشكل أدناه لحل الأسئلة 8-6: (مهارة سابقة)

6) عند أية نقطة تقع مدينة الرياض؟

7) عند أية نقطة تقع المدينة المنورة؟

8) ما اسم المدينة التي يمثلها الزوج (4, G)؟

استعمل قانون المسافة لإيجاد البعد بين كل نقطتين فيما يلي:

9) $(0,1)\ ,\ (2,8)$

10) $(-2,0)\ ,\ (3,3)$

مراجعة سريعة

مثال 1

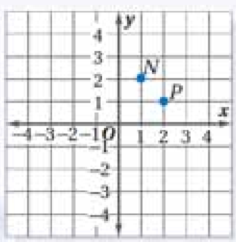
ارسم النقطتين $N(1, 2)$, $P(2, 1)$ في المستوى الإحداثي:

النقطة N:

ابدأ من نقطة الأصل، وتحرك وحدة واحدة إلى اليمين لأن الإحداثي السيني يساوي 1، ثم تحرك وحدتين إلى الأعلى لأن الإحداثي الصادي يساوي 2. وارسم نقطة حيث وصلت وسمِّها N.

النقطة P:

ابدأ من نقطة الأصل، وتحرك وحدتين إلى اليمين لأن الإحداثي السيني يساوي 2، ثم تحرك وحدة واحدة إلى الأعلى لأن الإحداثي الصادي يساوي 1. وارسم نقطة حيث وصلت وسمّها P.



مثال 2

أوجد المسافة بين النقطتين (2,1) , (6,4)

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$=\sqrt{(2-6)^2+(1-4)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

استكشاف
7-1

معمل الهندسة
التحويلات

في المستوى، يمكنك أن تسحب الأشكال أو تقلبها أيْ تعكسها، أو تقوم بتدويرها، أو تكبيرها أو تصغيرها؛ للحصول على أشكال أخرى. وتستعمل هذه الأشكال المتناظرة في تصاميم ورق الجدران والسيراميك وأشغال فنيّة مختلفة، وكل شكل مما تراه يناظر شكلًا آخر، وتتشكل هذه الأشكال المتناظرة باستعمال التحويلات.

التحويل عملية تنقل الشكل الأصلي إلى شكل آخر جديد يُسمّى الصورة. وفيما يلي بعض أنواع التحويلات: (والخطوط الحمراء تبيّن بعض النقاط المتناظرة).

الإزاحة أو الانسحاب

يمكن إزاحة أي شكل في أي اتجاه.

الانعكاس

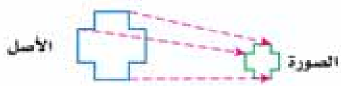
يمكن قلب أي شكل فوق خط مستقيم.

الدوران

يمكن تدوير أي شكل حول نقطة.

التمدد

يمكن تكبير أي شكل أو تصغيره.

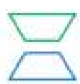


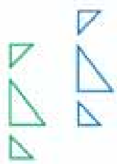
تمارين ومسائل

حدّد التحويلات التالية، علمًا بأن الشكل الملوّن باللون الأزرق هو الشكل الأصلي:

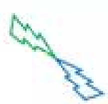
(1


(2

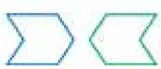

(3


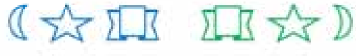
(4


(5


(6


(7


(8


(9


تحليل النتائج

10) **خمّن:** التحويل متساوي القياس هو التحويل الذي تطابق فيه الصورةُ الناتجة الأصلَ. فأيُّ التحويلات السابقة متساوية القياس؟

قراءة الرياضيات

حركة الأجسام الصلبة

تعرف حركة الأجسام الصلبة بأنها متقايسة؛ لأن أبعاد الجسم الأصلي لا تتغير تحت تأثير التحويل الهندسي.

7-1 الانعكاس
Reflection

لماذا؟ (استعد)

توفر البرك انعكاسات رائعة لما يحيط بها. ففي الأيام الصافية تلاحظ أن لكل نقطة فوق سطح الماء، نقطة مناظرة لها تحت سطحه هي صورتها الناتجة عن الانعكاس. وتكون المسافة بين النقطة الأصلية وسطح الماء في البركة مساوية للمسافة بين صورتها وسطح الماء.

الأفكار الرئيسية

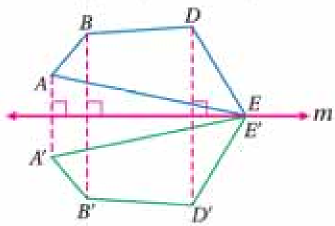
- أرسم الصورة الناتجة عن الانعكاس.
- أتعرّف خطوط التماثل ونقاطها وأرسمها.

المفردات

الانعكاس
reflection
خط الانعكاس
line of reflection
تحويل التطابق أو (التقايس)
isometry
محور تناظر
line of symmetry
نقطة التناظر
point of symmetry

رسم الانعكاسات، **الانعكاس** هو تحويل يُمثّل قلب الشكل في نقطة، أو في خط مستقيم، أو في مستوى.

والشكل المجاور يبين انعكاسًا للشكل الرباعي $ABDE$ في الخط المستقيم m. لاحظ أن الخط المستقيم m ينصّف القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطة وصورتها ويكون عموديًّا عليها. ويُسمّى الخط المستقيم m **خط الانعكاس** للشكل $ABDE$ وصورته $A'B'D'E'$، ولأن النقطة E تقع على خط الانعكاس، فتعتبر هي وصورتها نقطة واحدة.

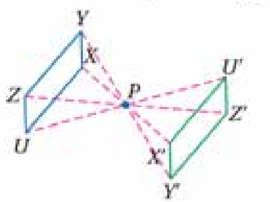


A', A'', A''' ، هي أسماء للنقاط المتناظرة الناتجة من تحويل واحد، أو من عدد من التحويلات.

وقد يكون الانعكاس في نقطة. فمثلًا، يبين الشكل المقابل انعكاس المضلع $UXYZ$ في النقطة P.
لاحظ أن النقطة P هي نقطة المنتصف لكل قطعة مستقيمة تصل بين أية نقطة من المضلع الأصلي وصورتها.

$\overline{UP} \cong \overline{U'P},\ \overline{XP} \cong \overline{X'P}$

$\overline{YP} \cong \overline{Y'P}, \overline{ZP} \cong \overline{Z'P}$



عند انعكاس شكل في خط مستقيم أو في نقطة، تكون الصورة مطابقة للأصل، وعليه يكون الانعكاس **تحويل تطابق**. أيْ أن الانعكاس **يحافظ على** المسافات، وقياسات الزوايا، والقطع المستقيمة والأشكال، وهذا النوع من التحويلات يسمى **تقايسًا** أيضًا.
وفي الشكل أعلاه يكون
المضلع $UXYZ \cong$ المضلع $U'X'Y'Z'$.

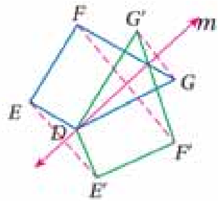
الأضلاع المتناظرة	الزوايا المتناظرة
$\overline{XU} \cong \overline{X'U'}$	$\angle YXU \cong \angle Y'X'U'$
$\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$	$\angle XYZ \cong \angle X'Y'Z'$
$\overline{YZ} \cong \overline{Y'Z'}$	$\angle YZU \cong \angle Y'Z'U'$
$\overline{UZ} \cong \overline{U'Z'}$	$\angle ZUX \cong \angle Z'U'X'$

مراجعة المفردات

تحويل التطابق
هو تحويل تكون فيه الصورة الناتجة مطابقة للشكل الأصلي.
(الدرس 3-3)

مثـال انعكاس شكل في خط مستقيم

1 **ارسم صورة الشكل الرباعي $DEFG$ بالانعكاس في الخط المستقيم m.**



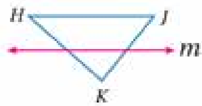
الخطوة 1: بما أن النقطة D تقع على خط الانعكاس فإنها وصورتها تقعان على النقطة نفسها على الخط m. والآن ارسم قطعًا مستقيمة عمودية على الخط المستقيم m من النقاط E, F, G.

الخطوة 2: عين النقاط E', F', G' بحيث يكون الخط المستقيم m عمودًا منصّفًا لكل من EE', FF', و GG'. فتكون النقاط E', F', G' هي صور النقاط E, F, G على الترتيب.

الخطوة 3: صل الرؤوس D, E', F', G'.

الخطوة 4: تحقق من أن هذه النقاط هي صور النقاط $D\ E, F, G$.

بما أن النقاط D, E', F', G' هي صور النقاط D, E, F, G الناتجة من الانعكاس في الخط المستقيم m، فإن الشكل الرباعي $DE'F'G'$ هو انعكاس الشكل الرباعي $DEFG$ في الخط المستقيم m.



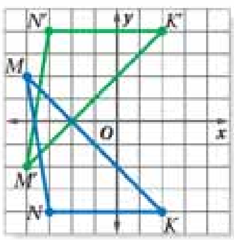
تحقق من فهمك

1) ارسم صورة المثلث HJK بـ الانعكاس في الخط المستقيم m.

مثـال الانعكاس في المستوى الإحداثي

2 **هندسة إحداثية:** رؤوس المثلث KMN هي $K(2, -4), M(-4, 2), N(-3, -4)$.

A **ارسم المثلث KMN وصورته الناتجة من الانعكاس حول محور السينات، وقارن إحداثيي كل رأس بإحداثيي صورته.**



استعمل الخطوط الرأسية للشبكة لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس من رؤوس المثلث بحيث يكون محور السينات على بُعد واحد من الرأس وصورته تجد أن.

$K(2, -4) \rightarrow K'(2, 4)$

$M(-4, 2) \rightarrow M'(-4, -2)$

$N(-3, -4) \rightarrow N'(-3, 4)$

ثم عين صور رؤوس المثلث وصل بينها لتشكّل المثلث $K'M'N'$ الناتج من الانعكاس.

لاحظ أن الإحداثي السيني يبقى كما هو في حين أن الإحداثي الصادي

تتغير إشارته عند الانعكاس في محور السينات، أيّ أن $(a, b) \rightarrow (a, -b)$.

B **ارسم المثلث KMN وصورته الناتجة من الانعكاس حول نقطة الأصل، وقارن بين إحداثيي كل رأس وإحداثيي صورته.**

بما أن $\overline{KK'}$ تمر في نقطة الأصل، لذا استعمل البعدين الأفقي والرأسي للنقطة K عن نقطة الأصل لإيجاد إحداثيات النقطة K'، ولاحظ أنه إذا تحركت من النقطة K' أربع وحدات للأعلى ووحدتان لليسار تصل إلى نقطة الأصل، لذلك عليك أن تتحرك من نقطة الأصل أربع وحدات للأعلى ووحدتين لليسار لتصل إلى النقطة K'، وبالأسلوب نفسه يمكنك إيجاد صور النقطتين الأخريين. وهكذا تجد أن:

قراءة الرياضيات

كتابة مختصرة

يقرأ التعبير

$k(2, -4) \rightarrow k'(2,4)$

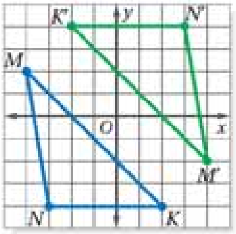
على النحو التالي:

تقترن النقطة k بالنقطة k′، أي أن صورة النقطة k هي النقطة k′.

$K(2, -4) \rightarrow K'(-2, 4)$

$M(-4, 2) \rightarrow M'(4, -2)$

$N(-3, -4) \rightarrow N'(3, 4)$



عيّن صور الرؤوس، وصل بينها لتشكل المثلث $K'M'N'$ الناتج من الانعكاس، ولاحظ أن المقارنة بين الإحداثيات تبين $(a, b) \rightarrow (-a, -b)$.

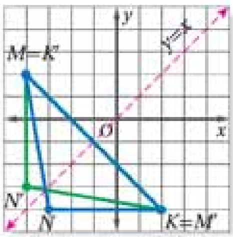
c **ارسم المثلث KMN وصورته الناتجة من الانعكاس حول الخط المستقيم $y = x$، ثم قارن بين إحداثيي كل رأس وإحداثيي صورته.**

ميل الخط المستقيم $y = x$ يساوي 1 وبما أن القطعة المستقيمة $\overline{KK'}$ عمودية على الخط المستقيم $y = x$ لذا، فميلها يساوي -1. والآن، ارسم عمودًا من K على المستقيم $y = x$ وحدد النقطة K' بحيث يكون المستقيم $y = x$ منصفًا للقطعة المستقيمة KK'. ستجد أن $K' = M$. ويمكنك التوصل إلى K' من K وذلك بأن تتحرك من النقطة K ثلاث وحدات لليسار وثلاث للأعلى لتصل إلى النقطة الواقعة على المستقيم $y = x$ وتكون القطعة المستقيمة $\overline{KK'}$ عندها عمودية على المستقيم $y = x$، ثم تتحرك من هذه النقطة ثلاث وحدات لليسار وثلاث للأعلى فتصل إلى النقطة $K'(-4, 2)$. وبالطريقة نفسها أوجد صورة M عبر المستقيم $y = x$، ستجد أنها تساوي K ثم أوجد صورة N. ستحصل على:

$K(2, -4) \rightarrow K'(-4, 2)$

$M(-4, 2) \rightarrow M'(2, -4)$

$N(-3, -4) \rightarrow N'(-4, -3)$



صِلْ بين الصور الثلاث لتحصل على الصورة $K'M'N'$ للمثلث الأصلي. وبمقارنة إحداثيي كل رأس بإحداثيي صورته، تلاحظ أن $(a, b) \rightarrow (b, a)$.

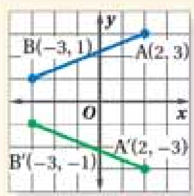
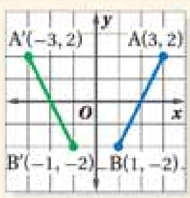
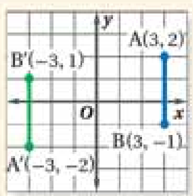
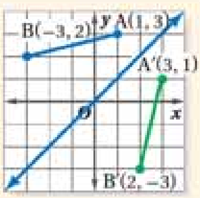
تحقق من فهمك

2A) $RUDV$ شكل رباعي رؤوسه هي: $R(-2, 2)$, $U(3, 1)$, $D(4, -1)$, $V(-2, -2)$. ارسم الشكل $RUDV$ وصورته الناتجة عن الانعكاس حول محور الصادات، ثم قارن إحداثيي كل رأس بإحداثيي صورته.

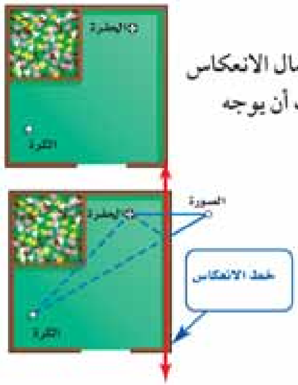
2B) ارسم الشكل $RUDV$ المذكور في (2A) وصورته الناتجة من الانعكاس حول نقطة الأصل.

2C) ارسم $RUDV$ المذكور أعلاه وصورته الناتجة من الانعكاس حول الخط المستقيم $y = x$.

ملخص المفاهيم — الانعكاسات في المستوى الإحداثي

الانعكاس	حول محور السينات	حول محور الصادات	حول نقطة الأصل	حول الخط المستقيم $y = x$
من الأصل إلى الصورة	$(a, b) \rightarrow (a, -b)$	$(a, b) \rightarrow (-a, b)$	$(a, b) \rightarrow (-a, -b)$	$(a, b) \rightarrow (b, a)$
كيفية إيجاد إحداثيات الصورة	اضرب الإحداثي الصادي في (-1)	اضرب الإحداثي السيني في (-1)	اضرب كلا الإحداثيين في (-1)	بدّل الإحداثيين السيني والصادي
مثال				

مثال من واقع الحياة — استعمال الانعكاس



3 **لعبة الجولف:** **لدى عادل لعبة جولف مصغرة، ويقول إن استعمال الانعكاس يساعد على إدخال الكرة في الحفرة بضربة واحدة. صف أين يجب أن يوجه عادل الكرة ليضمن دخولها في الحفرة من ضربة واحدة؟**

لا يستطيع عادل إدخال الكرة في الحفرة بضربة واحدة مباشرة؛ لأنها سترتطم بالحافة المعترضة (كما هو مبين في الشكل). ولتفادي ذلك، عليه توجيه الكرة عند ضربها لتصطدم حافة الملعب في النقطة المناسبة وترتد باتجاه الفتحة، ولذا عليه تخيل صورة الحفرة الناتجة من انعكاس الحفرة الأصلية على الحافة اليمنى للملعب، ثم يصوب الكرة نحو صورة الحفرة على الحافة اليمنى فتصطدم بالحافة عند النقطة المطلوبة وترتد عنها لتدخل الحفرة (كما هو مبين بالخط الأزرق المتقطع في الصورة الثانية).

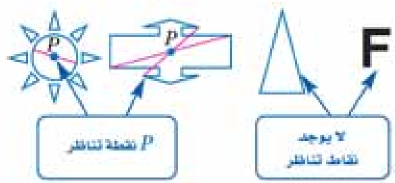
تحقق من فهمك

3) يريد ثامر أن يمرر كرة السلة إلى سليمان. صف كيف يمكنه أن يستعمل الانعكاس لمعرفة الموقع الذي عليه أن يوجه الكرة نحوه لتصطدم بأرض الملعب وترتد عنه إلى سليمان ليمسك بها عند مستوى خصره؟

محاور ونقاط التناظر: يمكن طي بعض الأشكال بحيث يكون الجزآن الناتجان متطابقين. خط الطي هذا هو خط انعكاس ويُسمى **محور تناظر**. وهناك أشكال أخرى تنعكس جميع نقاطها في نقطة مشتركة تُسمى **نقطة تناظر** لذلك الشكل.

محاور تناظر

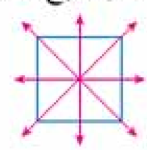
نقاط تناظر



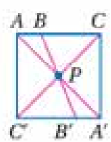
> **إرشادات**
>
> **نقطة التناظر**
>
> نقطة التناظر لأي شكل هي نقطة المنتصف لكل القطع المستقيمة التي تصل بين نقاط الشكل الأصلي وصورها. وحتى توجد نقطة تناظر للشكل، فإنه لأي نقطة عليه يجب أن توجد صورة لها على الشكل نفسه.

مثال — رسم محاور التناظر

4 **ما عدد محاور التناظر للمربع؟ وهل للمربع نقاط تناظر؟**



للمربع أربعة محاور تناظر.



النقطة P هي نقطة التناظر حيث إن:

$AP = PA', BP = PB'$

$CP = PC'$ وهكذا.

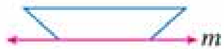
تحقق من فهمك

4) ما عدد محاور التناظر للمستطيل؟ وهل للمستطيل نقاط تناظر؟

تأكد

مثال 1 (ص. 124)

ارسم صورتي المضلعين التاليين بالانعكاس حول الخطين المستقيمين m و ℓ:

1) 

2) 

مثال 2 (ص. 124-125)

هندسة إحداثية: ارسم كلًّا من الأشكال التالية وصورته الناتجة من الانعكاس المذكور:

3) $\triangle XYZ$ الذي رؤوسه هي $X(0, 0), Y(3, 0), Z(0, 3)$، والانعكاس حول محور السينات.

4) $\triangle ABC$ الذي رؤوسه هي $A(-1, 4), B(4, -2), C(0, -3)$، والانعكاس حول محور الصادات.

5) $\triangle DEF$ الذي رؤوسه هي $D(-1, -3), E(3, -2), F(1, 1)$، والانعكاس حول نقطة الأصل.

6) $\square GHIJ$ الذي رؤوسه هي $G(-1, 2), H(2, 3), I(6, 1), J(3, 0)$، والانعكاس حول المستقيم $y = x$

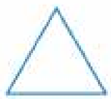
مثال 3 (ص. 126)

7) **تنس أرضي:** صف كيف يمكن أن يستعمل معاذ الانعكاس ليرسل كرة التنس بحيث تصل إلى أدنى من مستوى خصر منافسه.

مثال 4 (ص. 126)

حدّد عدد محاور التناظر لكل من الشكلين التاليين، ثم حدد إذا كان له نقطة تناظر أم لا:

8) 

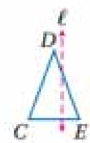
9) 

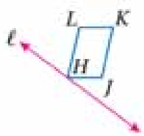
تمارين ومسائل

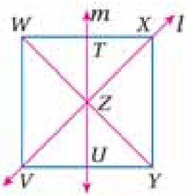
للأسئلة	انظر الأمثلة
10–20	1
21–24	4
25–31	2
32 , 33	3

مساعدة الواجب المنزلي

ارسم كلًّا من الشكلين التاليين وصورته الناتجة عن الانعكاس حول الخط المستقيم ℓ:

10) 

11) 



استعمل الشكل المجاور لحل الأسئلة **12—20**:

سمِّ صورة كلٍّ من الأشكال التالية الناتجة عن الانعكاس حول الخط المستقيم ℓ:

12) $\overline{WX}$ 13) $\overline{WZ}$ 14) $\angle XZY$

سمِّ صورة كلٍّ من الأشكال التالية الناتجة عن الانعكاس حول الخط المستقيم m:

15) T 16) $\overline{UY}$ 17) $\triangle YVW$

سمِّ صورة كلٍّ من الأشكال التالية الناتجة عن الانعكاس حول النقطة Z:

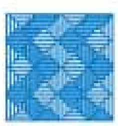
18) U 19) $\angle TXZ$ 20) $\triangle YUZ$

حدّد عدد محاور التناظر لكل شكل، ثم حدد إذا كان للشكل نقطة تناظر أم لا:

21) 

22) 

23) 

24) 

هندسة إحداثية: ارسم كلًّا من الأشكال التالية وصورته الناتجة عن الانعكاس المعطى:

25) $\overline{AB}$ حيث $A(2, 4)$ ، $B(-3, -3)$ ، والانعكاس حول محور السينات.

26) المربع $QRST$ الذي رؤوسه هي $Q(-1, 4), R(2, 5), S(3, 2), T(0, 1)$ ، والانعكاس حول محور السينات.

27) $\overline{DJ}$ حيث $D(4, 4), J(-3, 2)$ ، وانعكاسها حول محور الصادات.

28) شبه المنحرف الذي رؤوسه هي $D(4, 0), E(-2, 4), F(-2, -1), G(4, -3)$، والانعكاس حول محور الصادات.

29) الشكل الرباعي $GHIJ$ الذي رؤوسه هي $G(-2, -2), H(2, 0), I(3, 3), J(-2, 4)$ ، والانعكاس حول نقطة الأصل.

30) $\triangle ABC$ الذي رؤوسه هي $A(-3, -1), B(0, 2), C(3, -2)$ والانعكاس حول الخط المستقيم $y = x$

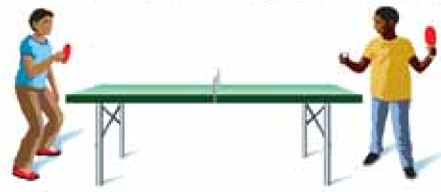
31) $\triangle KLM$ الذي رؤوسه هي $K(4, 0), L(-2, 4), M(-2, 1)$ والانعكاس حول الخط المستقيم $y = -x$

الربط مع الحياة

إن لعبة البلياردو بشكلها الحالي كانت معروفة ومحبية منذ بدايات القرن التاسع عشر. ولكن كانت هناك أشكال سابقة لهذه اللعبة منذ القرن الرابع عشر.

32) **بلياردو:** يريد لؤي أن يصوب الكرة البيضاء ليدخل الكرة رقم 8 في الجيب السفلي الأيمن. انقل الشكل إلى دفترك، وارسم مسار الكرة رقم 8 .

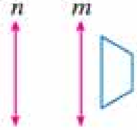
33) **تنس الطاولة:** يريد ماهر أن يضرب كرة التنس بحيث ترتد عن الطاولة لتصل سامي في مستوى مرفقه. انقل الشكل إلى دفترك وارسم مسار الكرة بعد أن أرسلها ماهر.



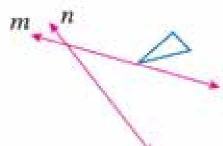
34) **هندسة إحداثية:** إذا عُكس $\triangle ABC$ حول محور السينات، ثم حول محور الصادات، ثم حول نقطة الأصل، وكانت رؤوس الصورة النهائية على النحو التالي: $A'''(4,7), B'''(10, -3), C'''(-6,-8)$. فما إحداثيات النقاط A, B, C؟

انقل كل شكل مما يلي إلى دفترك، ثم اعكسه حول المستقيم m ، واعكس الصورة الناتجة حول المستقيم n، ثم قارن الأصل بالصورة النهائية:

35)



36)



مجوهرات: استعمل المعلومات التالية لحل الأسئلة 39–37:

يقص تجار المجوهرات الحجارة الكريمة بأشكال مختلفة. حدد محاور التناظر ونقاط التناظر لأشكال الحجارة الكريمة التالية (إن وجدت):

37) شكل الكمّثرى

38) شكل القلب

39) شكل حجر الزمرد

مسائل مهارات التفكير العليا

40) مسألة مفتوحة: ارسم شكلًا في المستوى الإحداثي بحيث تكون نتيجة انعكاسه في أي من المحورين مماثلة تمامًا للأصل. ما نوع الأشكال التي تشترك في هذه الصفة؟

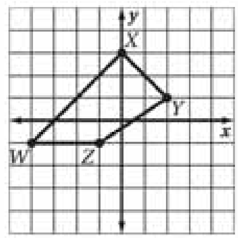
41) تبرير: أعط مثالًا مضادًّا للعبارة التالية: "نقطة تقاطع محوري تناظر أو أكثر لأي شكل مستو تمثل نقطة تناظر لذلك الشكل".

42) تحدٍّ: بيِّن أن صورة نقطة ما بالانعكاس حول نقطة الأصل هي الصورة ذاتها الناتجة من انعكاس تلك النقطة حول محور السينات، ثم حول محور الصادات.

43) اكتب: فسر أين يمكن إيجاد انعكاسات في الطبيعة، مضمنًا إجابتك مثالين من الطبيعة لكل منهما محور تناظر. ثم ارجع إلى الصفحة 123، وأعط تفسيرًا عن علاقة بُعد نقطة عن سطح الماء بصورة تلك النقطة في الماء.

تدريب على اختبار معياري

44) إذا كان الشكل الرباعي $W'X'Y'Z'$ هو صورة لانعكاس الشكل الرباعي $WXYZ$ المرسوم أدناه حول محور الصادات، فما إحداثيات النقطة X'؟



A	$(0, -3)$	C	$(-3, 0)$
B	$(0, 3)$	D	$(3, 0)$

45) مراجعة: خطّط محمد أن يقود سيارته خلال الأيام الأربعة القادمة لقطع المسافات التالية: 160 mi, 235mi, 185mi, 220mi. فإذا كانت سيارته تحتاج في المتوسط إلى جالون واحد من البنزين لكل 32mi، فكم جالونًا يحتاج محمد لقطع المسافات الأربع؟

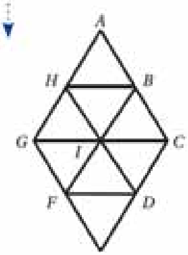
A	20	C	32
B	25	D	50

46) مراجعة: ما مجموعة الحل للمتباينة: $3z + 4 < 6 + 7z$؟

A	$\{z\vert z > -0.5\}$	C	$\{z\vert z < -0.5\}$
B	$\{z\vert z > -2\}$	D	$\{z\vert z < -2\}$

مراجعة تراكمية

أجب عن الأسئلة 49-47 معتمدًا على الرسم المجاور الذي فيه جميع الزوايا الحادة تساوي °60.



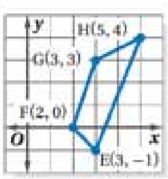
47) اذكر مثلثين متشابهين؟

48) اذكر متوازيي أضلاع متشابهين.

49) اذكر شبهي منحرف متشابهين.

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: احسب طول كل ضلع من أضلاع الشكل الرباعي $EFGH$. (مهارة سابقة)



50) $\overline{EF}$

51) $\overline{FG}$

52) $\overline{GH}$

53) $\overline{HE}$

7-2 الإزاحة (الانسحاب)
Translation

الأفكار الرئيسية

- أرسم الصور الناتجة عن الإزاحة باستعمال إحداثيات النقاط.
- أرسم الصور الناتجة عن الإزاحة باستعمال انعكاسات متكررة.

المفردات

الإزاحة (الانسحاب) translation

التركيب composition

استعد

تفتتح بعض الاحتفالات الوطنية بعروض عسكرية تزيدها بهجةً وبهاءً. وتمثّل معظم حركات أعضاء تلك الفرق العسكرية ما يُعرف في الهندسة بالإزاحة أو الانسحاب.

الإزاحات باستعمال الإحداثيات، **الإزاحة** أو الانسحاب هي تحويل ينقل نقاط الشكل جميعها مسافات متساوية وفي الاتجاه نفسه. ويمكن رسم الإزاحات في المستوى الإحداثي إذا علمنا اتجاه الإزاحة وعدد الوحدات التي تحرّكها الشكل أفقيًا و / أو رأسيًا. فللعددين الثابتين a,b، الإزاحة تنقل النقطة $P(x, y)$ إلى الصورة: $P'(x + a, y + b)$ أو باختصار $(x, y) \to (x + a, y + b)$.

مثال على اختبار معياري — الإزاحة في المستوى الإحداثي

1 إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث QRS هي: $Q(-4, 2), R(3, 0), S(4, 3)$. وأُزيح هذا المثلث 4 وحدات إلى الأسفل، و 6 وحدات إلى اليمين للحصول على المثلث $Q'R'S'$، فما إحداثيات رؤوس $\triangle Q'R'S'$؟

A $Q'(-8, 8), R'(-1, 6), S'(0, 9)$ **C** $Q'(-1, -2), R'(-3, -4), S'(-2, 9)$

B $Q'(0, 8), R'(7, 6), S'(8, 9)$ **D** $Q'(2, -2), R'(9, -4), S'(10, -1)$

اقرأ نص سؤال الاختبار

يطلب إليك إيجاد إحداثيات رؤوس صورة $\triangle QRS$ بعد إزاحته 4 وحدات إلى الأسفل، و 6 وحدات إلى اليمين: أيْ عندما $(x, y) \to (x + 6, y - 4)$.

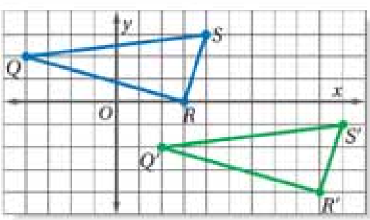
حل سؤال الاختبار

$$Q(-4, 2) \to Q'(-4 + 6, 2 - 4) = Q'(2, -2)$$

$$R(3, 0) \to R'(3 + 6, 0 - 4) = R'(9, -4)$$

$$S(4, 3) \to S'(4 + 6, 3 - 4) = S'(10, -1)$$

وللتحقق من صحة إجابتك، ارسم $\triangle QRS$ وصورته $\triangle Q'R'S'$. يجب أن يكون كل رأس من رؤوس الصورة على بعد 6 وحدات إلى اليمين، و 4 وحدات إلى الأسفل من الرأس الأصلي. الجواب هو البديل D.



إرشادات الاختبار

اقرأ بعناية

احرص على قراءة المسائل بانتباه وتأمل. ففي المثال المقابل ذكرت الإزاحة الرأسية (التغير في الإحداثي الصادي) قبل الإزاحة الأفقية (التغير في الإحداثي السيني)، لذلك أعد ترتيب المعلومات لتتجنب الوقوع في الخطأ.

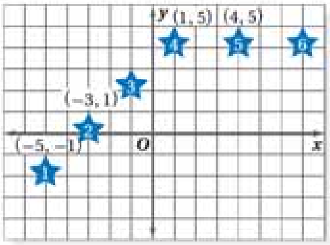
تحقق من فهمك

1) رؤوس الشكل الرباعي $HJLK$ هي: $K(2, 5)$ و $H(1, 0), J(0, 4), L(3, 1)$. إذا أُزيح $HJLK$ بمقدار 3 وحدات إلى اليسار و 5 وحدات إلى الأسفل، فما إحداثيات الرأس K'؟

A $(-6, -3)$ **B** $(-1, 0)$ **C** $(5, 10)$ **D** $(-5, -10)$

مثال من واقع الحياة إزاحات متكررة

2 **الرسوم المتحركة:** تستعمل أجهزة الحاسوب في صناعة الرسوم المتحركة. والشكل المجاور يبين إزاحات متكررة للحصول على صور النجمة الظاهرة فيه. أوجد الإزاحة التي تنقل النجمة 1 إلى النجمة 2.



استعمل الإحداثيات الظاهرة عند الرأس العلوي لكل نجمة لإيجاد الإزاحات.

$(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ قانون الإزاحة

$(-5, -1) \rightarrow (-3, 1)$ باستخدام الإحداثيات $(-3, 1)$, $(-5, -1)$.

$x + a = -3$		$y + b = 1$	
$-5 + a = -3$	بالتعويض $x = -5$	$-1 + b = 1$	بالتعويض $y = -1$
$a = 2$	بإضافة 5 إلى الطرفين.	$b = 2$	بإضافة 1 إلى الطرفين.

إذن، فالإزاحة $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 2)$ هي الإزاحة المطلوبة لنقل النجمة 1 إلى النجمة 2.

تحقق من فهمك

2) أوجد الإزاحة المطلوبة لنقل النجمة 4 إلى النجمة 5.

الإزاحة باستعمال انعكاسات متكررة: توجد طريقة أخرى للحصول على إزاحة لشكل ما، وذلك بانعكاس الشكل في خط مستقيم، ثم انعكاس الصورة الناتجة في خط مستقيم يوازي الخط الأول. ويسمّى التحويل الناتج من تحويلات متعاقبة **تركيبًا**.

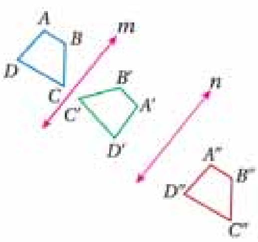
قراءة الرياضيات

يستعمل بعض الناس كلمة "انتقال" أو "انزلاق" بدلًا من كلمة "إزاحة".

مثال إيجاد إزاحة باستعمال الانعكاسات.

3 الخطان المستقيمان m و n في الشكل إلى اليسار متوازيان. حدد إذا كان الشكل الأحمر هو صورة ناتجة عن إزاحةٍ للشكل الأزرق أم لا.

اعكس الشكل الرباعي $ABCD$ في المستقيم m. لتحصل على الصورة $A'B'C'D'$ والملونة باللون الأخضر. ثم اعكس الصورة $A'B'C'D'$ في المستقيم n. لتحصل على الصورة الجديدة $A''B''C''D''$ والملونة باللون الأحمر. لاحظ أن الشكل الرباعي $A''B''C''D''$ له وضع الشكل الأصلي $ABCD$ نفسه. وعليه، يكون الشكل الرباعي $A''B''C''D''$ صورة للشكل الرباعي $ABCD$ بالإزاحة.



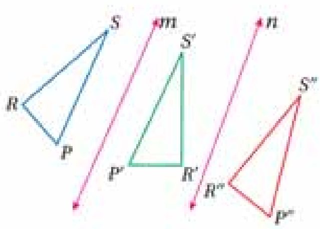
إرشادات

تحويلات متساوية القياس

بما أن الإزاحة عبارة عن تركيب انعكاسين، فإن الإزاحة هي تحويل متساوي القياس، أي أن جميع الخصائص التي لا تتأثر بالانعكاس، لن تتأثر أيضًا بالإزاحة وذلك مثل الاستقامة وقياسات الزوايا والمسافات.

تحقق من فهمك

3) مستعينًا بالشكل أدناه، حدد إذا كان الشكل الأحمر صورة للشكل الأزرق بالإزاحة أم لا.



تأكد

مثال 1 (ص 130)

1) **هندسة إحداثية:** ارسم $\overline{DE}$ التي طرفاها $D(-3, -4)$, $E(4, 2)$، ثم ارسم صورتها تحت تأثير الإزاحة: $(x, y) \rightarrow (x + 1, y + 3)$.

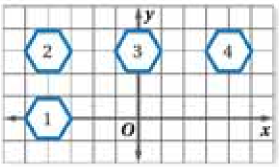
2) **تدريب على اختبار معياري:** إذا تمت إزاحة $\triangle KLM$ الذي رؤوسه: $K(5, -2), L(-3, -1), M(0, 5)$ مسافة 4 وحدات إلى الأسفل و 3 وحدات إلى اليسار للحصول على $\triangle XYZ$، فما إحداثيات رؤوس $\triangle XYZ$؟

A $X(2, -6), Y(-6, -5), Z(-3, 1)$　　C $X(1, -5), Y(-7, -4), Z(-4, 2)$

B $X(-2, -6), Y(-6, -5), Z(-3, -1)$　　D $X(-1, -5), Y(-7, -4), Z(-4, -2)$

مثال 2 (ص 131)

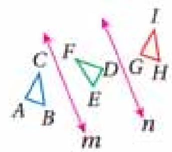
3) **رسوم متحركة:** أوجد الإزاحة التي تنقل الشكل السداسي 1 إلى السداسي 2، وكذلك أوجد الإزاحة التي تنقل الشكل السداسي 3 إلى السداسي 4.



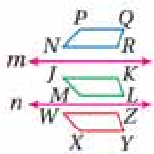
مثال 3 (ص 131)

المستقيمان m و n في كل من الشكلين التاليين متوازيان. حدّد إذا كان الشكل الأحمر صورة ناتجة عن إزاحة الشكل الأزرق. أجب بـ "نعم" أو "لا"، وفسّر إجابتك.

4)



5)



تمارين ومسائل

مساعدة الواجب المنزلي

للأسئلة	انظر الأمثلة
6–11	1
12–16	3
18, 19	2

هندسة إحداثية: ارسم كلًّا من الأشكال التالية وصورها الناتجة عن الإزاحة المعطاة:

6) $\overline{PQ}$ قطعة مستقيمة طرفاها $P(2, -4)$, $Q(4, 2)$، أزيحت 3 وحدات إلى اليسار و 4 وحدات إلى الأعلى.

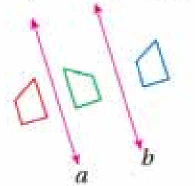
7) $\overline{AB}$ قطعة مستقيمة طرفاها $A(-3, 7)$, $B(-6, -6)$، أزيحت 4 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى الأسفل.

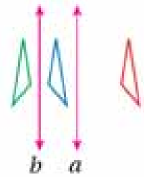
8) $\triangle EFG$ رؤوسه هي: $E(0, -4), F(-4, -4), G(0, 2)$، أُزيح حسب القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x + 2, y - 1)$

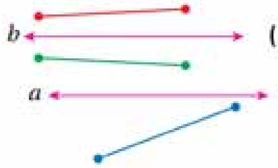
9) الشكل الرباعي $PQRS$ رؤوسه هي: $P(1, 4), Q(-1, 4), R(-2, -4), S(2, -4)$، أُزيح حسب القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x - 5, y + 3)$

10) الشكل الخماسي $VWXYZ$ رؤوسه هي: $V(-3, 0), W(-3, 2), X(-2, 3), Y(0, 2)$، $Z(-1, 0)$، أُزيح حسب القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x + 4, y - 3)$

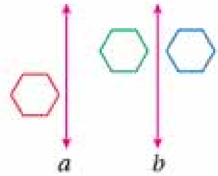
في كل شكل من الأشكال التالية: $a \| b$. حدّد إذا كان الشكل الأحمر هو صورة ناتجة عن إزاحة الشكل الأزرق أم لا. أجب بـ "نعم" أو "لا"، وفسر إجابتك.

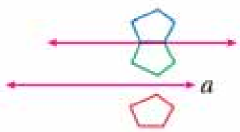
11) 

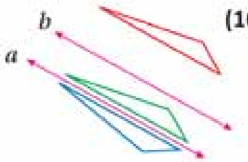
12) 

13) 

في كل من الأشكال التالية $a \| b$. حدّد إذا كان الشكل الأحمر صورة ناتجة عن إزاحة الشكل الأزرق أم لا. أجب بـ "نعم" أو "لا". وفسر إجابتك.

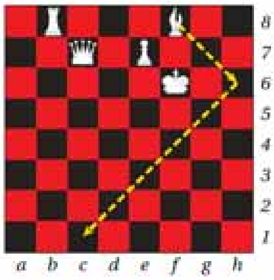
14) 

15) 

16) 

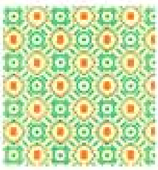
17) **شطرنج:** يمكن أن يتحرك الفيل في المربع f8 بشكل قطري عبر المربعات السوداء. فإذا أصبح الفيل في المربع c1 بعد حركتين، فصف الإزاحة التي نقلت الفيل من المربع f8 إلى المربع c1.

18) **شطرنج:** صف الإزاحة التي تنقل الوزير من المربع c7 إلى المربع c1 ليقضي على الفيل.



19) **بحث:** ابحث في الإنترنت أو في أي مصدر آخر عن كيفية حركة كل قطعة من قطع الشطرنج واكتب عن حركة واحدة لكل قطعة منها.

20) **تزيين:** يتألف النمط الظاهر على ورق الجدران في الشكل المجاور من تكرار لأشكال مختلفة. فهل يمكن تقسيم النمط الظاهر فيه إلى نصفين برسم خط مستقيم بحيث يكون كل نصف انعكاسًا للنصف الآخر حول المستقيم المرسوم؟ فسر إجابتك.



الربط مع الحياة

أول من استعمل الورق لتزيين الجدران هم الصينيون الذين ألصقوا أوراق الأرز لتزيين الجدران وذلك قبل الميلاد بمئتي عام. وقد طوّرت الأنماط الحديثة التي تزين ورق الجدران والتي تتكون من نمط أساسي متكرر.

لكل من السؤالين 21,22 أوجد الإزاحة التي تنقل النقطة $A(-4, 3)$

إلى النقطة A' المعطاة، ثم استخدم هذه الإزاحة لإيجاد B' التي هي صورة النقطة $B(-1, -2)$:

21) $A'(2, 5)$ 22) $A'(-1, 1)$

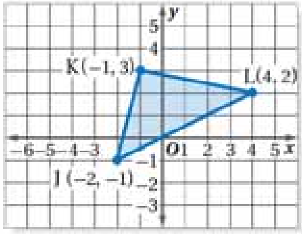
هندسة إحداثية: ارسم كلًّا من الأشكال التالية وصورها الناتجة عن الإزاحة المعطاة:

23) $\triangle PQR$ رؤوسه هي: $P(-3, -2), Q(-1, 4), R(2, -2)$ أزيح حسب القاعدة: $(x, y) \to (x + 2, y - 4)$

24) $\triangle RST$ رؤوسه هي: $R(-4, -1), S(-1, 3), T(-1, 1)$ انعكس حول الخط المستقيم $y = 2$، ثم انعكس حول المستقيم $y = -2$

25) إذا أزيح $\triangle ABC$ حسب القاعدة: $(x, y) \to (x - 4, y + 5)$ للحصول على $\triangle A'B'C'$ الذي رؤوسه هي: $A'(-8, 5), B'(2, 7), C'(3, 1)$. فأوجد إحداثيات A, B, C.

26) إذا أزيح المثلث FGH للحصول على $\triangle MNP$. وكانت $F(3, 9), G(-1, 4), M(4, 2), P(6, -3)$، فأوجد إحداثيات كل من H ، N، ثم اكتب قاعدة الإزاحة.

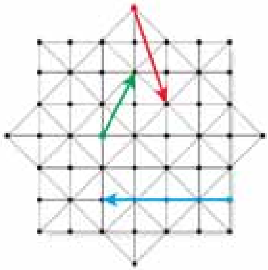


إحداثيات رؤوس $\triangle JKL$ هي: $J(-2, -1), K(-1, 3), L(4, 2)$.

27) أوجد قياس كل زاوية من زوايا المثلث باستعمال المنقلة.

28) ارسم الصورة الناتجة من انعكاس $\triangle JKL$ حول الخط المستقيم $x = 2$، ثم حول المستقيم $x = 6$.

29) قس $\angle J', \angle K', \angle L'$. وقارن هذه القياسات بقياسات زوايا $\triangle JKL$. أي زاويا هذين المثلثين تتطابق؟ فسر إجابتك.



زخرفة: استعمل المعلومات التالية لحل الأسئلة 32–30:
إذا كان أصغر شكل رباعي في الشكل المجاور هو مربع طول ضلعه 2 cm فأوجد الإزاحات التي يمثلها كل من:

30) الخط الأخضر **31)** الخط الأزرق **32)** الخط الأحمر

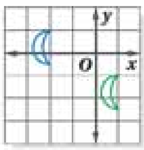
مسائل مهارات التفكير العليا

33) مسألة مفتوحة: اختر نقطتين A , B في المستوى الإحداثي إحداثياتهما أعداد صحيحة، ثم صف كيف يمكنك استعمال العدّ لتجد الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى B.

34) تبرير: اذكر الخصائص التي تحافظ عليها الإزاحة. فسّر إجابتك

35) اكتشف الخطأ: يصف كل من علي ومحمود التحويلات الهندسية التي تجعل الهلال الأخضر صورة للهلال الأزرق في الشكل التالي. فأيهما وصفه صحيح؟ ولماذا؟

علي	محمود
إزاحة الهلال الأزرق 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين للأسفل	انعكاس للهلال الأزرق حول محور الصادات، ثم انعكاس حول محور السينات

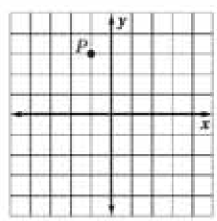


36) تحدٍّ: رؤوس المثلث TWY هي: $T(3, -7), W(7, -4), Y(9, -8)$. ورؤوس المثلث BDG هي: $B(3, 3), D(7, 6), G(9, 2)$. إذا كان $\triangle BDG$ صورة للمثلث TWY تحت تأثير إزاحة ناتجة من انعكاسين في خطين متوازيين، فأوجد معادلتي هذين الخطين.

37) اكتب: استعمل المعلومات المعطاة في فقرة استعد صفحة 130 لتشرح الإزاحات الناتجة من تحركات فرق العروض العسكرية، موضحًا ذلك بشرح تحركات نمطية بسيطة لأحد أعضاء الفرقة وعلاقة تحركاته بالإزاحات.

تدريب على اختبار معياري

38) عيّن موقع النقطة P في الشكل أدناه تحت تأثير الإزاحة: $(x + 3, y + 1)$.



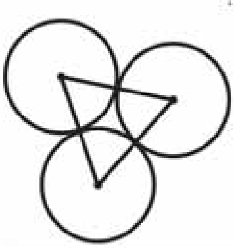
A $(0, 6)$

B $(0, 3)$

C $(2, -4)$

D $(2, 4)$

39) مراجعة: في الشكل المجاور ثلاث دوائر متطابقة ومتماسة محيط كل منها 44 cm. كم سنتيمترًا محيط المثلث الواصل بين مراكزها؟



A 22

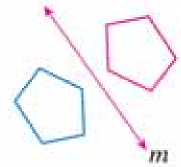
B 42

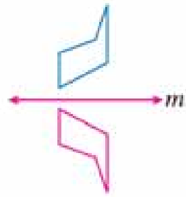
C 44

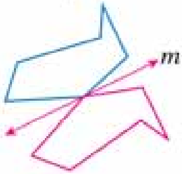
D 47

مراجعة تراكمية

انقل الأشكال التالية إلى دفترك، ثم ارسم الصورة الناتجة من انعكاس كل من هذه الأشكال حول الخط المستقيم m. (الدرس 1-7)

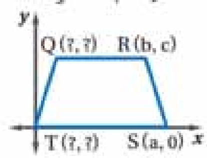
(40


(41


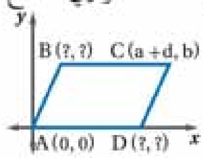
(42


أوجد الإحداثيات المجهولة في الشكلين التاليين: (الدرس 7-5)

(43 $QRST$ شبه منحرف متطابق الساقين.



(44 $ABCD$ متوازي أضلاع.



اذكر الفرضية التي ستبدأ بها كي تبرهن كل عبارة مما يلي برهانًا غير مباشر: (الدرس 3-4)

(45 كل متسوق يدخل المعرض يستقبله مندوب مبيعات.

(46 إذا حصلت على وظيفة، فقد تقدمت بطلب توظيف.

(47 إذا كانت $4y + 17 = 41$ فإن $y = 6$.

(48 إذا تطابقت زاويتان داخليتان متبادلتان ناتجتان عن قطع مستقيم لمستقيمين آخرين، فإن هذين المستقيمين متوازيان.

أوجد المسافة بين كل مستقيمين متوازيين في كل مما يلي: (الدرس 6-2)

(49 $x = -2$، $x = 5$

(50 $y = -6$، $y = -1$

(51 $y = 2x + 3$، $y = 2x - 7$

(52 $y = x + 2$، $y = x - 4$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: ارسم كل زاوية مما يلي باستعمال المنقلة: (مهارة سابقة)

(53 30

(54 45

(55 52

7-3 الدوران
Rotation

استعد

تنطلق لعبة السيارات على مسار دائري خاص. ولا تكاد تخلو منها أي مدينة للألعاب. وهذه اللعبة تقدم مثالًا على الدوران.

الأفكار الرئيسية

- أرسم الصورة الناتجة من دوران شكل مستعملًا زاوية الدوران.
- أتعرف الأشكال التي تحقق التماثل الدوراني.

المفردات

الدوران rotation
مركز الدوران center of rotation
زاوية الدوران angle of rotation
التماثل الدوراني rotational symmetry
النقاط الثابتة invariant points
التقايس المباشر direct isometry
التقايس غير المباشر indirect isometry

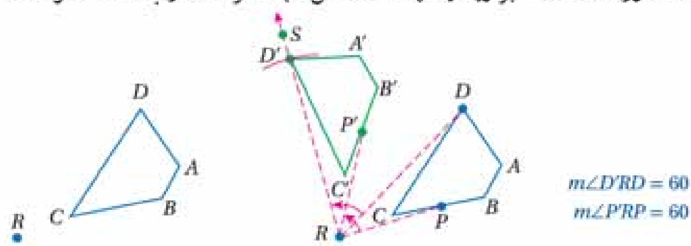
رسم الأشكال الناتجة عن الدوران، **الدوران** تحويل تدور به كل نقطة من نقاط الشكل بزاوية معينة واتجاه معين حول نقطة ثابتة تُسمى **مركز الدوران**.

في المثال 1 أدناه، تمثل النقطة R مركز الدوران للشكل الرباعي $ABCD$. وقياسات الزوايا ARA', BRB', CRC', DRD' كلها متساوية. كذلك فإن أي نقطة P على الشكل الأصلي $ABCD$ لها صورة P' على الشكل $A'B'C'D'$ بحيث يكون قياس $\angle PRP'$ مساويًا لقياسات الزوايا المذكورة أعلاه، وتُسمى هذه الزاوية **زاوية الدوران**. ويحقق الدوران خصائص التحويلات التقايسية جميعها، لذا، يُعد الدوران تحويلًا تقايسيًّا.

مثال

رسم الشكل الناتج عن الدوران

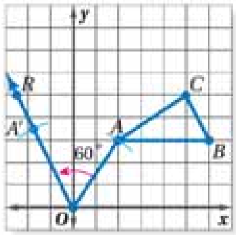
1 a) دوّر $\square ABCD$ بزاوية قياسها $60°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة R.

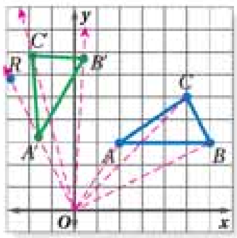


- ارسم قطعة مستقيمة من النقطة R إلى النقطة D.
- استخدم المنقلة لرسم زاوية قياسها $60°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة وأحد ضلعيها $\overline{RD}$.
- سمِّ الضلع الثاني لهذه الزاوية $\overrightarrow{RS}$.
- ثبّت الفرجار في R، واقتطع من $\overrightarrow{RS}$ قطعة طولها RD وسمّ النقطة الناتجة على $\overrightarrow{RS}$ النقطة D'.
- كرر هذه العملية لكل من الرؤوس الثلاثة A, B, C.
- صل النقاط $A'B'C'D'$.

b) المثلث ABC رؤوسه هي: $A(2,3), B(6,3), C(5,5)$.
ارسم الصورة الناتجة من دوران $\triangle ABC$ بزاوية قياسها $60°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

- ارسم $\triangle ABC$ أولًا.
- ارسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل O إلى النقطة A.
- استعمل المنقلة لرسم زاوية قياسها $60°$ باتجاه عكس حركة عقارب الساعة بحيث يكون $\overline{OA}$ أحد أضلاعها.
- ارسم $\overrightarrow{OR}$.
- ثبت الفرجار في النقطة O واقتطع من $\overrightarrow{OR}$ قطعة تطابق $\overline{OA}$ وسمِّ القطعة الناتجة $\overline{OA'}$.
- كرر العملية مع كل من النقطتين B و C. لتحصل على $\triangle A'B'C'$ الذي يمثل الصورة الناتجة من دوران $\triangle ABC$ بزاوية قياسها $60°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.





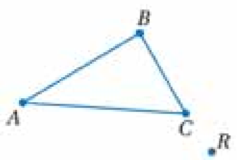
إرشادات

الالتفاف

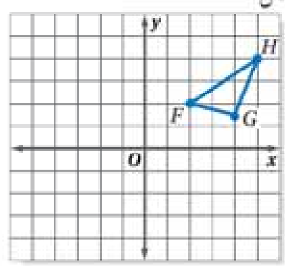
الدوران الذي يسمى أحيانًا التفافًا يُقاس عادة باتجاه عكس حركة عقارب الساعة. والالتفاف الكامل يعني $360°$ (لفة كاملة)، أما نصف الالتفاف فيعني $180°$.

تحقق من فهمك

1A) انقل المثلث ABC إلى دفترك، ثم دوّره بزاوية قياسها $120°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة R.



1B) المثلث FGH رؤوسه هي: $F(2,2), G\left(4, 1\frac{1}{2}\right)$, $H(5,4)$. ارسم صورة $\triangle FGH$ الناتجة من دورانه بزاوية قياسها $90°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.



هناك طريقة أخرى للحصول على دوران لجسم حول نقطة، وذلك بإخضاع الجسم لانعكاسين متعاقبين في خطين متقاطعين. فانعكاس الجسم في خط مستقيم، ثم انعكاس صورته الناتجة في خط مستقيم آخر

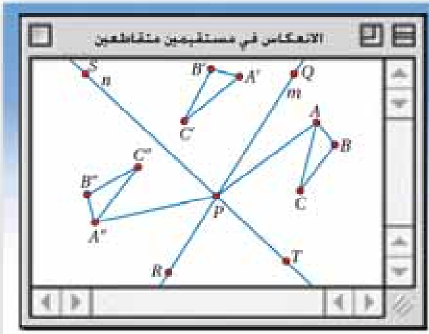
معمل هندسة باستعمال الحاسوب

يقطع المستقيم الأول هو مثال آخر على تركيب الانعكاسات.

الانعكاسات المتعاقبة في الخطوط المتقاطعة:

إنشاء شكل:

- أنشئ مثلثًا مختلف الأضلاع باستعمال برنامج رسم هندسي وسمِّه ABC.
- أنشئ مستقيمين m و n يتقاطعان خارج $\triangle ABC$.
- سمِّ نقطة التقاطع P.



تحليل

1) اعكس $\triangle ABC$ في الخط المستقيم m، ثم اعكس الصورة $\triangle A'B'C'$ في الخط المستقيم n لتحصل على الصورة $\triangle A''B''C''$.

2) صف التحويل الذي نقل $\triangle ABC$ إلى $\triangle A''B''C''$.

3) قِسِ الزاوية الحادة (الصغرى) الناتجة عن تقاطع المستقيمين m و n.

4) أنشئ قطعة مستقيمة من A إلى P، وقطعة مستقيمة من A'' إلى P. وأوجد قياس زاوية الدوران $\angle APA''$، ثم أوجد $m\angle BPB''$ و $m\angle CPC''$.

كوّن تخمينًا

5) ما العلاقة بين قياسات زوايا الدوران والزاوية الحادة الناتجة عن تقاطع المستقيمين m و n؟

عند تدوير شكل ما بطريقة انعكاسين متعاقبين في خطين متقاطعين، تلاحظ أن هناك علاقة بين زاوية الدوران والزاوية الصغرى الناتجة عن تقاطع الخطين المستقيمين.

النظريات

نظرية 7.1 إذا كانت A في أي دوران هي النقطة الأصلية، و A'' هي الصورة الناتجة من دوران A حول مركز الدوران P، يكون قياس زاوية الدوران $\angle APA''$ مساويًا ضعف قياس الزاوية الحادة أو القائمة الناتجة من تقاطع خطي الانعكاس.

نتيجة 7.1 إن نتيجة انعكاسين متعاقبين في خطين مستقيمين متعامدين تعادل دورانًا بزاوية قياسها $180°$ حول نقطة تقاطع هذين الخطين.

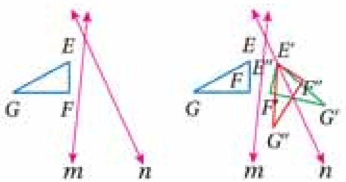
سوف تبرهن النظرية 7.1 والنتيجة 7.1 في السؤالين 32 و 33 على الترتيب.

كل تحويل تطابق(تقايس) في المستوى الإحداثي يكون إزاحة أو تركيب إزاحة ودوران، أو تركيب إزاحة ودوران وانعكاس.

مثال

الانعكاسات حول الخطوط المتقاطعة

2 **ارسم الصورة الناتجة عن انعكاس $\triangle EFG$ حول الخط المستقيم m، ثم في الخط المستقيم n.**

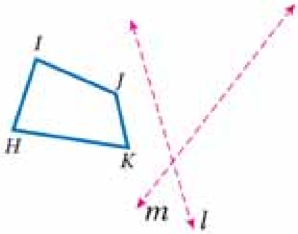


ارسم أولًا الصورة الناتجة عن انعكاس $\triangle EFG$ في الخط المستقيم m، وسمِّها $\triangle E'F'G'$.

ثم ارسم صورة $\triangle E'F'G'$ بالانعكاس حول الخط المستقيم n، وسمِّ الصورة الناتجة $\triangle E''F''G''$. كيف يمكنك نقل $\triangle EFG$ مباشرة إلى $\triangle E''F''G''$ باستعمال الدوران؟

تحقق من فهمك

2) ارسم صورة الشكل الرباعي $HIJK$ الناتجة عن انعكاسه في الخط المستقيم ℓ، ثم في الخط المستقيم m.



إرشادات

خطأ شائع

إن الترتيب الذي يتم فيه الانعكاسان المتعاقبان في مستقيمين غير متعامدين لا يؤثر في قياس زاوية الدوران، ولكن يؤثر في اتجاهها حيث يكون الدوران في أحد الترتيبين باتجاه حركة عقارب الساعة، ويكون بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة في الترتيب الآخر.

التماثل الدوراني: إذا أمكن تدوير شكل بزاوية أقل من °360 حول نقطة وكانت الصورة مطابقة للأصل، نقول عندئذٍ إن الشكل يحقق **التماثل الدوراني**، أو إنه متماثل دورانياً.

فالشكل الخماسي المنتظم أعلاه يحقق التماثل الدوراني من الرتبة الخامسة؛ وذلك لأن هناك خمس زوايا دوران مختلفة (بما فيها الزاوية صفر) أقل من °360، وتكون نتيجة كل منها مطابقة للأصل.
ومقدار التماثل الدوراني يُساوي °360 مقسومة على الرتبة. وعليه، فإن مقدار التماثل الدوراني للمضلع الخماسي المنتظم يُساوي °360 مقسومة على 5، أيْ °72.

مثال من واقع الحياة **تحديد التماثل الدوراني**

3 **اللحاف المطرّز:** **اذكر رتبة ومقدار التماثل الدوراني في كل جزء من هذا اللحاف.**

a) النجمة المركزية الكبيرة:
رتبة التماثل الدوراني لهذه النجمة 20 ، ومقداره °18.

b) اللحاف كاملًا:
رتبة التماثل الدوراني لهذا اللحاف 4 ، ومقداره °90.

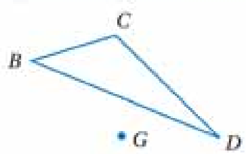
تحقق من فهمك

3) اذكر رتبة التماثل الدوراني ومقداره للشكل الثماني المنتظم.

تأكد

مثال 1
(ص. 136-137)

1) انقل $\triangle BCD$ إلى دفترك، ثم ارسم الصورة الناتجة من دورانه بزاوية قياسها °60 عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة G.

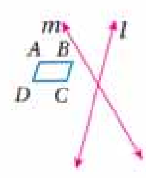


2) إذا تم تدوير الشكل الرباعي $WRST$ الذي رؤوسه هي: $W(0, 1), R(0, 2), S(1, 2), T(4, 0)$. بزاوية مقدارها °45 باتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، فارسم الصورة الناتجة.

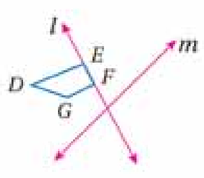
مثال 2
(ص. 138)

انقل كلًّا من الشكلين التاليين إلى دفترك، واستعمل تحويلًا من تركيب انعكاسين في الخطين المستقيمين ℓ و m لتجد الصورة الناتجة عن الدوران حول نقطة تقاطع المستقيمين.

3)



4)



مثال 3
(ص. 139)

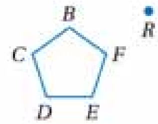
5) **أقراص مدمجة:** يدوّر مبدل قرص مدمج 5 أسطوانات واحدة تلو الأخرى. اذكر مقدار التماثل الدوراني من أسطوانة إلى أخرى.

تمارين ومسائل

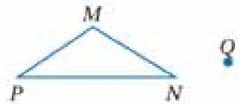
انظر الأمثلة	للأسئلة
1	6 –9
2	10–12
3	13, 14

مساعدة الواجب المنزلي

6) انقل الشكل الخماسي $BCDEF$ إلى دفترك، ثم دوّره بزاوية قياسها $110°$ بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة R.



7) انقل $\triangle MNP$ إلى دفترك، ثم دوّره بزاوية قياسها $180°$ بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة Q.

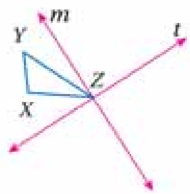


8) $\overline{XY}$ قطعة مستقيمة طرفاها: $X(-5, 8)$, $Y(0, 3)$. ارسم الصورة الناتجة عن تدوير $\overline{XY}$ بزاوية قياسها $45°$ باتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

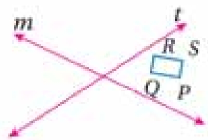
9) إذا كانت رؤوس $\triangle PQR$ هي: $P(-1, 8)$, $Q(4, -2)$, $R(-7, -4)$. فارسم صورة $\triangle PQR$ تحت تأثير دوران بزاوية قياسها $90°$ بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

انقل كلًّا من الأشكال التالية إلى دفترك، ثم استعمل تحويلًا من تركيب انعكاسين في الخطين المستقيمين m و t لتجد الصورة الناتجة عن التدوير حول نقطة تقاطع هذين المستقيمين:

10)



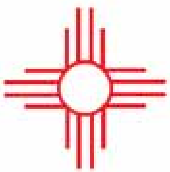
11)



12)

13) **مراوح:** تمثل شفرات المروحة تماثلًا دورانيًّا. اذكر رتبة التماثل الدوراني ومقداره لشفرات كلٍّ من المراوح التالية:

14) **شعار:** اذكر رتبة التماثل الدوراني ومقداره للشكل المجاور .



هندسة إحداثية: ارسم الصورة الناتجة من تدوير المثلث بزاوية قياسها $90°$ في الاتجاه المعطى حول مركز الدوران المذكور في كل من السؤالين التاليين، وسمّ رؤوس الصورة.

15) $\triangle XYZ$ رؤوسه هي: $X(0, -1)$, $Y(3, 1)$, $Z(1, 5)$ ودورانه بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة $P(-1, 1)$.

16) $\triangle RST$ رؤوسه هي: $R(0, 1)$, $S(5, 1)$, $T(2, 5)$ ودورانه مع اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة $P(-2, 5)$.

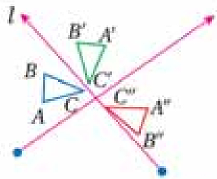
هندسة إحداثية: **ارسم الصورة الناتجة عن تدوير المثلث باستعمال انعكاسين متعاقبين في المستقيمين المذكورين، واكتب إحداثيات رؤوس الصورة وزاوية الدوران:**

17) $\triangle TUV$ رؤوسه هي: ,$T(0, 4)$, $U(2, 3)$, $V(1, 2)$ وانعكاسه حول محور الصادات ثم حول محور السينات.

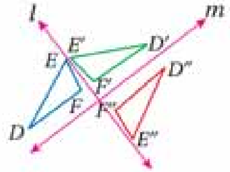
18) $\triangle KLM$ رؤوسه هي: ,$K(0, 5)$, $L(2, 4)$, $M(-2, 4)$ وانعكاسه حول المستقيم $y = x$ ثم حول محور السينات.

حدد إذا كان تركيب الانعكاسين كما يظهران في الرسم تدويرًا للشكل أم لا، فسر ذلك:

19)



20)



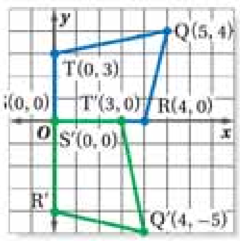
ألعاب مسلية: حدد إذا كان الركوب في اللعبة الظاهرة في كل من الصور التالية دورانًا للراكب، مجيبًا بـ "نعم" أو "لا".

21) فناجين الشاي الدوّارة

22) العجلة الدائرية

23) حلقة السفينة المتدحرجة

24) هندسة إحداثية: دوّر الشكل الرباعي $QRST$ بزاوية قياسها $90°$ باتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل. صف هذا التحويل باستعمال الإحداثيين x , y.



25) إذا تم الدوران على المستوى الإحداثي، فما قياسات زوايا الدوران التي تجعل رسم الصورة الناتجة عن الدوران عملية سهلة؟

26) اشرح طريقتين يمكن استعمالهما لتدوير شكل ما.

استعمل المعلومات التالية لحل الأسئلة 30–27 :

التقايس المباشر: هو التحويل الذي يمكن فيه الحصول على الصورة بتحريك الشكل الأصلي كما هو في المستوى بحيث يحافظ على قياسات زواياه، واتجاهه وأطواله، ويحافظ على البينية والاستقامة للشكل الأصلي. **والتقايس غير المباشر:** هو التحويل الذي لا يمكن إجراؤه مع المحافظة على الاتجاه بين النقاط كما في التقايس المباشر.

27) انقل الجدول التالي إلى دفترك وأكمله، وحدد إذا كان التحويل المذكور يحافظ على الخاصية المذكورة أم لا (اكتب كلمة نعم أو لا):

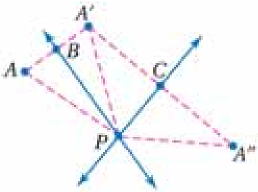
التحويل	قياس الزوايا	البينية	الاتجاه	الاستقامة	قياس المسافات
الانعكاس					
الإزاحة					
الدوران					

حدد إذا كان التحويل المذكور تقايسًا مباشرًا أم غير مباشر فيما يلي:

28) الانعكاس **29)** الإزاحة **30)** الدوران

31) الأحرف الإنجليزية: أيُّ الحروف التالية $A, B, C, H, I, N, O, S, W, X, Y, Z$ يعطي الحرف نفسه بعد الدوران بزاوية قياسها $180°$؟

برهان: في الشكل المجاور: النقطة A' هي صورة النقطة A بعد انعكاسها حول $\overleftrightarrow{BP}$ والنقطة A'' هي صورة النقطة A' بعد انعكاسها حول $\overleftrightarrow{PC}$ والنقاط A, B, A' على استقامة واحدة. والنقاط A', C, A'' على استقامة واحدة أيضًا. استعمل الشكل لكتابة برهان حر للسؤالين التاليين:



32) النظرية 7.1

33) النتيجة 7.1

مسائل مهارات التفكير العليا

34) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا في الربع الأول من المستوى الإحداثي، ودوّر الشكل $90°$ باتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، ثم دوّره $90°$ بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة. وصف النتيجة باستعمال الإحداثيات y, x.

تحدٍ: استعمل المعلومات التالية لحل الأسئلة 35-37:

النقاط التي لا تتأثر بتحويلٍ ما تُسمّى **نقاطًا ثابتة**. اذكر النقاط الثابتة (إن وجدت) لكل من التحويلات التالية:

35) الانعكاس حول خط مستقيم.

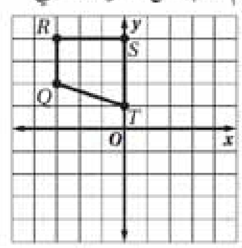
36) التدوير بزاوية قياسها $x°$، حيث $(0 < x < 360)$ حول نقطة مثل P.

37) $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ حيث a , b لا يساوي أيّ منهما صفرًا.

38) **اكتب:** صف بعض ألعاب مدينة الألعاب التي تتضمن دورانًا، وكيف يتم دوران كل منها، وذلك في فقرة "استعد" (ص 136).

تدريب على اختبار معياري

39) انظر إلى الشكل الرباعي $QRST$ المرسوم في المستوى الإحداثي، ثم أجب عن السؤال التالي:



ما الدوران الذي يجعل صورة النقطة R عند النقطة $R'(4, 3)$؟

A $270°$ بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة T.

B $185°$ بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة T.

C $180°$ مع اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

D $90°$ مع اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

40) **مراجعة:** يبيّن الجدول التالي عدد سكان بعض الدول العربية مع نسبة المتعلمين في كل منها في الفترة 2000–2001. أي من العبارات التالية تعطي أفضل وصف للعلاقة بين عدد السكان ونسب التعليم؟

الدولة	عدد السكان بالملايين	النسبة المئوية للمتعلمين
الإمارات العربية	2.9	76.7
قطر	0.6	81.7
الكويت	2.4	82.4
عُمان	2.7	73
المملكة العربية السعودية	22.8	77.1

A كلما زاد عدد السكان، زادت نسبة المتعلمين.

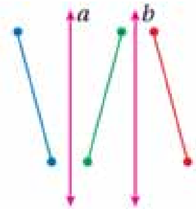
B لا يمكن تحديد علاقة بين عدد السكان ونسبة المتعلمين من المعلومات المعطاة في الجدول.

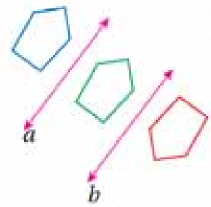
C نسبة التعليم في عُمان أقل نسبة؛ لأن عدد سكانها أقل من عدد السكان في أي دولة أخرى.

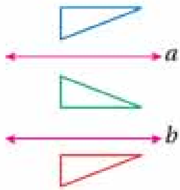
D عدد سكان الكويت أكبر من عدد السكان في أي دولة أخرى.

مراجعة تراكمية

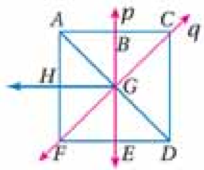
في كل من الأشكال التالية $a \parallel b$. حدد إذا كان الشكل الأزرق صورة للشكل الأحمر ناتجة عن إزاحته، مجيبًا بـ "نعم" أو "لا"، واشرح إجابتك. (الدرس 7-2)

41) 

42) 

43) 

معتمدًا على الشكل المجاور، سمّ صورة كل مما يلي تحت تأثير الانعكاس المذكور: (الدرس 7-1)



44) $\overline{AG}$ في الخط المستقيم p.

45) F في النقطة G.

46) $\overline{GE}$ في الخط المستقيم q.

47) $\angle CGD$ في الخط المستقيم p.

هندسة إحداثية: استعمل المعلومات التالية لحل الأسئلة 51-48:

رؤوس الشكل الرباعي $PQRS$ هي: $P(5, 2), Q(1, 6), R(-3, 2), S(1, -2)$. (الدرس 3-2)

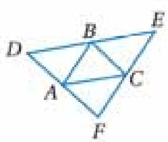
48) بيّن أن كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي $PQRS$ متوازيان.

49) بيّن أن كل ضلعين متجاورين في الشكل الرباعي $PQRS$ متعامدان.

50) أوجد طول كل ضلع في الشكل الرباعي $PQRS$.

51) ما نوع الشكل الرباعي $PQRS$؟

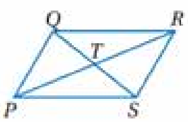
A, B, C هي نقاط المنتصف لـ: $\overline{DF}, \overline{DE}, \overline{EF}$ على الترتيب. (الدرس 6-4)



52) إذا كان $BC = 11, AC = 13, AB = 15$ فأوجد محيط $\triangle DEF$.

53) إذا كان $DE = 18, DA = 10, FC = 7$ فأوجد AB, BC, AC.

أكمل العبارات التالية المتعلقة بمتوازي الأضلاع $PQRS$، وبرر إجابتك: (الدرس 2-5)



54) $\overline{QR} \parallel \underline{\ ?\ }$

55) $\overline{PT} \cong \underline{\ ?\ }$

56) $\angle SQR \cong \underline{\ ?\ }$

57) $\angle QPS \cong \underline{\ ?\ }$

58) **قياس** يقول جهاد إن حديقة منزله الخلفية مثلثة الشكل أطوال أضلاعها 11m, 8m, 19m. فهل تعتقد أن هذه القياسات صحيحة؟ وضح إجابتك. (الدرس 4-4)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: أوجد قيم المتغيرات بأعداد كلية تجعل كل معادلة فيما يلي صحيحة: (مهارة سابقة)

59) $180a = 360$

60) $180a + 90b = 360$

61) $135a + 45b = 360$

62) $120a + 30b = 360$

63) $180a + 60b = 360$

64) $180a + 30b = 360$

اختبار منتصف الفصل

الدروس 1 - 7 إلى 3 - 7

ارسم كلًّا من الأشكال التالية وصورتها بالانعكاس المذكور: (الدرس 1-7)

1) $\triangle DEF$ رؤوسه هي: $D(-1, 1), E(1, 4), F(3, 2)$ حول نقطة الأصل.

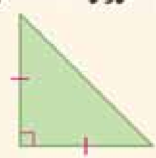
2) الشكل الرباعي $ABCD$ رؤوسه هي: $A(0, 2), B(2, 2), C(3, 0), D(-1, 1)$ حول المستقيم $y = x$.

3) **اختيار من متعدد:** إذا كانت صورة $A(-2, 5)$ تحت تأثير انعكاس ما هي $A'(2, -5)$، فما الانعكاس أو الانعكاسات التي استعملت؟ (الدرس 1-7)

- **A** انعكاس حول محور السينات
- **B** انعكاس حول محور الصادات
- **C** انعكاس حول نقطة الأصل
- **D** انعكاس حول محور الصادات وحول نقطة الأصل

اذكر محاور ونقاط التناظر لكل شكل في الأسئلة 6-4: (الدرس 1-7)

4)



5)

6)

ارسم كل شكل، ثم ارسم صورته بالإزاحة المعطاة. (الدرس 2-7)

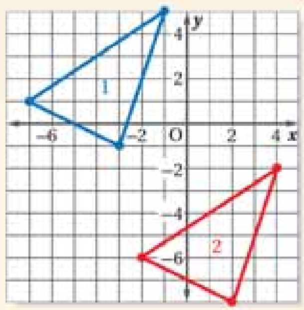
7) طرفا $\overline{PQ}$ هما $P(1, -4)$, $Q(4, -1)$، والإزاحة 3 وحدات إلى اليسار و 4 وحدات إلى الأعلى.

8) $\triangle KLM$ الذي رؤوسه $K(-2, 0), L(-4, 2), M(0, 4)$، والإزاحة $(x, y) \rightarrow (x + 1, y - 4)$

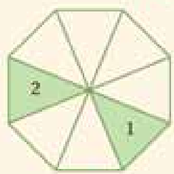
9) **اختيار من متعدد:** إذا تمت إزاحة المثلث XYZ الذي رؤوسه $X(5, 4), Y(3, -1), Z(0, 2)$، بحيث أصبحت صورة X هي $X'(3, 1)$. فما إحداثيات كل من Y', Z'؟ (الدرس 2-7)

- **A** $Y'(5, 2), Z'(2, 5)$
- **B** $Y'(0, -3), Z'(-3, 0)$
- **C** $Y'(-1, 4), Z'(-2, -1)$
- **D** $Y'(1, -4), Z'(-2, -1)$

10) أوجد الإزاحة التي تنقل $\triangle 1$ إلى $\triangle 2$ في الشكل التالي: (الدرس 2-7)

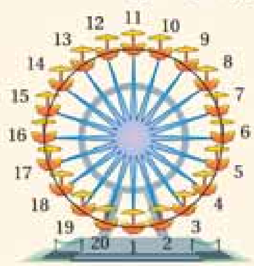


11) في الشكل أدناه، صف الدوران الذي يحرك المثلث 1 إلى المثلث 2: (الدرس 3-7)



ترفيه: **استعمل المعلومات التالية لحل الأسئلة 14-12:** (الدرس 3-7)

تظهر في الشكل المجاور عجلة كبيرة دوّارة مثبت عليها 20 مقعدًا، تعدّ مثالًا على الدوران.



12) اذكر رتبة التماثل الدوراني لهذه العجلة ومقداره.

13) ما قياس زاوية الدوران التي تحرك المقعد 1 إلى مكان المقعد 5؟

14) إذا دار المقعد 1 بزاوية مقدارها $144°$، بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة، فما رقم المقعد الذي يحل هذا المقعد محله؟

ارسم الصورة الناتجة عن دوران كل مثلث مما يلي بزاوية قياسها $90°$ باتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، وسمّ الرؤوس: (الدرس 3-7)

15) $\triangle TUV$ الذي رؤوسه هي: $T(5, 5), U(7, 3), V(1, 2)$

16) $\triangle QRS$ الذي رؤوسه هي: $Q(-9, -4), R(-3, -2), S(0, 0)$

4-7 التبليط
Tessellation

الأفكار الرئيسية

- أتعرف التبليط المنتظم.
- أكوّن أشكال تبليط ذات خصائص معينة.

المفردات

التبليط
tessellation

التبليط المنتظم
regular tessellation

المتسق
uniform

التبليط شبه المنتظم
semi-regular tessellation

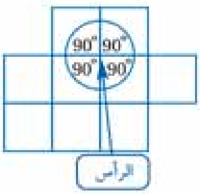
استعد

إن أول من رصّع الجدران والأرضيات والأسقف بالفسيفساء هم اليونانيون القدماء. ولكن الفنان الهولندي M.C. Escher (1898–1972) بيّن أن هذه الأشكال ليست فقط جميلة المنظر بل ذات خصائص ترتبط بالرياضيات والفيزياء والجيولوجيا والكيمياء وحتى علم النفس.

وفي الصورة المجاورة يمكن اختزال الأشكال كلها إلى مضلعات منتظمة أساسية هي مثلثات متطابقة الأضلاع وأشكال سداسية منتظمة تتكرر بنمط معين.

التبليط المنتظم: **التبليط** في الرياضيات نمط يستعمل لتغطية المستوى باستعمال شكل واحد وتحويلاته، أو مجموعة من الأشكال وتحويلاتها بحيث يتم تغطية المستوى كاملًا بدون فراغات أو تقاطعات.

ويكون مجموع زوايا المضلعات المحيطة بأي نقطة في أي تبليط مساويًا 360.



معمل الهندسة

تبليط بمضلّعات منتظمة

عمل نماذج وتحليلها

ادرس مجموعة المضلعات المنتظمة الواردة في الجدول، ثم أجب عن الأسئلة التالية:

1) أي المضلعات المنتظمة يمكن استعماله بمفرده في التبليط المنتظم؟

2) اكتب عبارة تبيّن مجموع قياسات الزوايا عند كل رأس في التبليط.

3) انقل الجدول التالي إلى دفترك، وأكمله:

المضلع المنتظم	مثلث متطابق الأضلاع	مربع	خماسي منتظم	سداسي منتظم	سُباعي منتظم	ثُماني منتظم
قياس إحدى الزوايا الداخلية						
هل يمكن استعماله للتبليط؟						

4) **خمّن:** ما الشرط الذي يجب أن يحققه قياس الزاوية الداخلية للمضلع المنتظم حتى يستعمل في التبليط المنتظم؟

كل تبليط استطعت تشكيله في معمل الهندسة هو تبليط منتظم. **فالتبليط المنتظم** هو التبليط الذي يتم تشكيله باستعمال نوع واحد من المضلعات المنتظمة. فقد وجدت في إجابتك عن السؤال 4، أنه عندما يكون قياس الزاوية الداخلية للمضلع المنتظم قاسمًا للعدد 360، فإنه يمكن التبليط بذلك المضلع.

مثال 1 المضلعات المنتظمة

1 حدد إذا كان استعمال المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه 24 ضلعًا في التبليط ممكنًا. ووضح إجابتك.

افرض أن $\angle 1$ هي إحدى الزوايا الداخلية لهذا المضلع.

$$m\angle 1 = \frac{180(n-2)}{n} \quad \text{قانون الزاوية الداخلية للمضلع المنتظم}$$

$$= \frac{180(24-2)}{24} \quad \text{بالتعويض}$$

$$= 165 \quad \text{بالتبسيط}$$

بما أن العدد 165 ليس قاسمًا للعدد 360، لذا فإن المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه 24 لا يمكن استعماله بمفرده في التبليط.

تحقق من فهمك

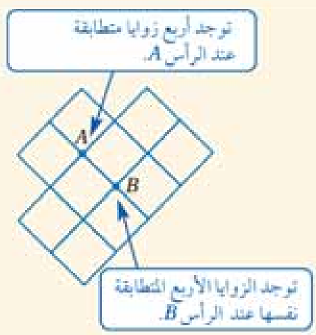
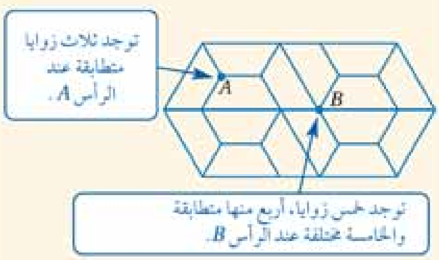
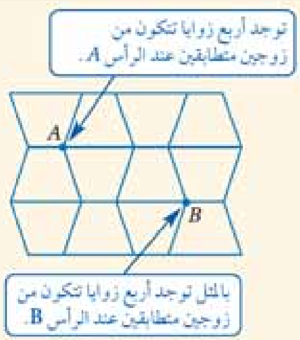
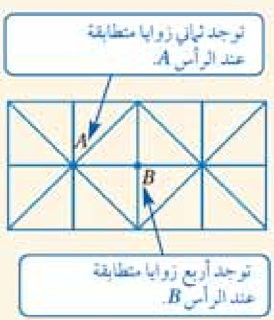
1) قرر ما إذا كان استعمال المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه 18 ضلعًا ممكنًا في التبليط.

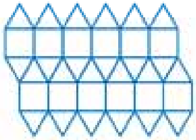
إرشادات

مراجعة

لمراجعة كيفية إيجاد قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم ارجع إلى الدرس 1-5.

التبليط بصفات معينة: يمكن أن يحتوي نمط التبليط أي نوع من المضلعات، والتبليط الذي يحتوي الترتيبات نفسها للأشكال والزوايا عند كل رأس يُسمى **تبليطًا متسقًا**.

متسق	غير متسق
	
	



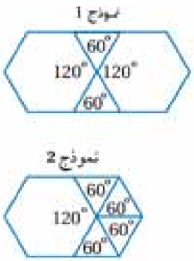
يمكن عمل تبليط باستعمال أكثر من نوع واحد من المضلعات. ويسمى التبليط الذي يتألف من مضلعين منتظمين أو أكثر **تبليطًا شبه منتظم**.

وإذا كان التبليط يتألف من مضلع غير منتظم أو أكثر فإنه يسمّى تبليطًا غير منتظم.

مثال التبليط شبه المنتظم

2 **حدد إذا كان عمل تبليط شبه منتظم ممكنًا باستعمال مضلعات سداسية منتظمة ومثلثات متطابقة الأضلاع طول ضلع كل منها وحدة واحدة، أم لا.**

الطريقة الأولى: اعمل نموذجًا.



يظهر في الشكل المجاور نموذجان للتبليط شبه المنتظم يستعمل في كل منهما مضلع سداسي منتظم ومثلث متطابق الأضلاع. لاحظ أن الفراغات عند كل رأس تم ملؤها باستعمال مثلثات متطابقة الأضلاع. وبذلك يكون قد استعمل في النموذج مضلعان سداسيان منتظمان ومثلثان متطابقا الأضلاع بالتناوب حول كل رأس. أما النموذج الثاني فاستُعمِل فيه مضلع سداسي منتظم واحد وأربعة مثلثات متطابقة الأضلاع حول كل رأس.

الطريقة الثانية: استعمال الجبر لحل السؤال.

قياس الزاوية الداخلية الواحدة للمضلع السداسي المنتظم يساوي $120° = \dfrac{180°(6-2)}{6}$.

قياس كل زاوية من زوايا المثلث متطابق الأضلاع يساوي $60°$. أوجد العددين الكلّيين h, t اللذين يحققان المعادلة $120h + 60t = 360$.

افرض $h = 1$.

$120(1) + 60t = 360$	بالتعويض
$120 + 60t = 360$	بالتبسيط
$60t = 240$	بطرح 120 من الطرفين
$t = 4$	بقسمة الطرفين على 60

افرض $h = 2$.

$120(2) + 60t = 360$	بالتعويض
$240 + 60t = 360$	بالتبسيط
$60t = 120$	بطرح 240 من الطرفين
$t = 2$	بقسمة الطرفين على 60

النتيجة الأولى $h = 1, t = 4$ تعني استعمال مضلع سداسي منتظم واحد مع أربعة مثلثات متطابقة الأضلاع حول كل رأس.

النتيجة الثانية $h = 2 , t = 2$ تعني استعمال مضلعين سداسيين منتظمين مع مثلثين متطابقي الأضلاع حول كل رأس.

لاحظ أنه عندما كانت $h = 0 , t = 6$ أو $h = 3 , t = 0$ فإن التبليط يكون منتظمًا؛ لاستعمال نوع واحد من المضلعات في كل حالة.

تحقق من فهمك

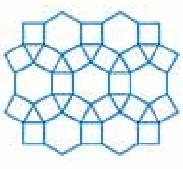
2) حدّد إذا كان عمل تبليط شبه منتظم ممكنًا باستعمال مربعات ومثلثات متطابقة الأضلاع طول ضلع كل منها وحدة واحدة، أم لا.

إرشادات

الرسم

عندما تصمم تبليطًا، فقد يساعدك رسم وحدة النمط على ورقة ثم قصها واستعمالها في رسم وحدات أخرى.

مثال من واقع الحياة تصنيف التبليط



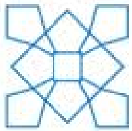
3 **تبليط الأرضيات:** يأتي بلاط الأرضيات بأشكال وأنماط عديدة. حدد إذا كان النمط الظاهر في الشكل تبليطًا أم لا، وإذا كان كذلك، فصنفه إلى: متسق، أو غير متسق، ومنتظم أو شبه منتظم أو غير منتظم.

النمط الظاهر تبليط؛ لأن مجموع قياسات الزوايا عند كل رأس يساوي $360°$.

والتبليط متسق لوجود مربعين، ومثلث، وشكل سداسي بالترتيب نفسه عند كل رأس. وكذلك فإن هذا التبليط شبه منتظم لاستعمال أكثر من نوع واحد من المضلعات المنتظمة.

تحقق من فهمك

3) حدد إذا كان النمط في الشكل المجاور تبليطًا أم لا، وإذا كان كذلك، فصنفه إلى متسق أو غير متسق ، ومنتظم أو شبه منتظم أو غير منتظم.



تأكد

مثال 1 (ص 146)

حدد إذا كان تبليط المستوى بالمضلع المذكور ممكنًا أم لا. ووضح إجابتك.

1) مضلع منتظم عدد أضلاعه 10

2) مضلع منتظم عدد أضلاعه 30

مثال 2 (ص 147)

حدد إذا كان تكوين تبليط شبه منتظم ممكنًا باستعمال الأشكال التالية أم لا، مفترضًا أن طول ضلع كل شكل يساوي وحدة واحدة:

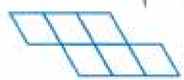
3) مضلع خماسي منتظم ومثلث متطابق الأضلاع

4) مضلع منتظم عدد أضلاعه 8 ومربع

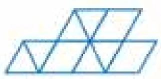
مثال 3 (ص 147-148)

حدد إذا كان النمط تبليطًا أم لا، وإذا كان كذلك، فصنفه إلى متسق أو غير متسق، ومنتظم أو شبه منتظم أو غير منتظم:

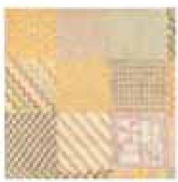
5)



6)



7) **اللحاف المطرز:** نمط "طابع البريد" يستعمل في تطريز اللحف. وضح لماذا يُعد هذا تبليطًا؟ وما نوعه؟



تمارين ومسائل

مساعدة الواجب المنزلي

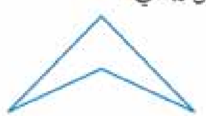
للأسئلة	انظر الأمثلة
8-11	3
12-17	1
18-20	2

حدد إذا كان بالإمكان تبليط المستوى بالمضلع المذكور أم لا، وإذا كان ذلك ممكنًا فصنفه إلى: متسق أو غير متسق، ومنتظم أو شبه منتظم أو غير منتظم :

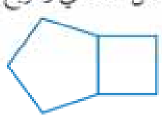
8) متوازي أضلاع.

9) شكل طائرة ورقية.

10) شكل رباعي.



11) شكل خماسي ومربع.



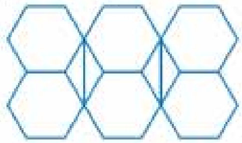
حدد إذا كان بالإمكان تبليط المستوى بالمضلع المنتظم المذكور أم لا. ووضّح إجابتك.

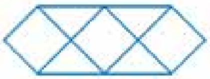
12) مضلع عدد أضلاعه 9.
13) مضلع سداسي.
14) مثلث متطابق الأضلاع
15) مضلع عدد أضلاعه 12.
16) مضلع عدد أضلاعه 23
17) مضلع عدد أضلاعه 36

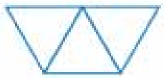
حدد إذا كان بالإمكان تكوين تبليط شبه منتظم باستعمال الأشكال المذكورة أم لا. افرض أن طول ضلع كل شكل يساوي وحدة واحدة:

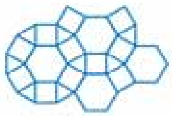
18) مضلعات منتظمة عدد أضلاع كل منها 8، ومعينات ليست مربعة.
19) مضلعات منتظمة عدد أضلاع كل منها 12، ومثلثات متطابقة الأضلاع.
20) مضلعات منتظمة عدد أضلاع كل منها 12، ومربعات، ومثلثات متطابقة الأضلاع.

حدد إذا كان كل نمط من الأنماط التالية تبليطًا أم لا، وإذا كان تبليطًا، فصنفه إلى متسق أو غير متسق، ومنتظم أو شبه منتظم أو غير منتظم:

21)


22)


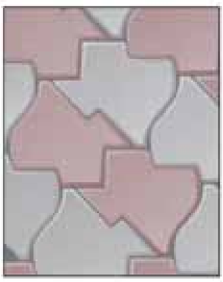
23)


24)


الربط مع الحياة

تحرص شركات الخزف على الإبداع والتنوع في صناعة السيراميك من حيث الشكل والحجم والزخرفة.

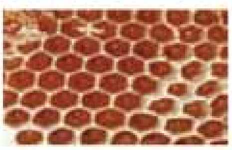
25) **صناعة الخزف:** يُعد الشكل المجاور من الأشكال المحببة لتبليط ساحات المنازل. صنف هذا التبليط إلى: متسق أو غير متسق، منتظم أو شبه منتظم أو غير منتظم. وفسر إجابتك.



حدد إذا كانت كل عبارة فيما يلي صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وبرر إجابتك:

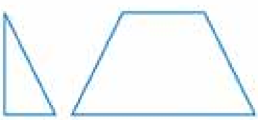
26) يمكن استعمال أي مثلث للتبليط.
27) يمكن استعمال أي شكل رباعي للتبليط.
28) المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه 16 يمكن استعماله للتبليط.

29) **نحل:** يتكون القرص الشمعي في خلية النحل من خلايا سداسية الشكل يخزن النحل فيها ما يصنعه من العسل. حدد إذا كان هذا النمط تبليطًا أم لا، وإذا كان تبليطًا فصنفه إلى: متسق أو غير متسق، ومنتظم أو شبه منتظم أو غير منتظم.

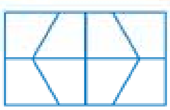


مسائل مهارات التفكير العليا

30) **مسألة مفتوحة:** استعمل هذين الشكلين في تصميم تبليط.



31) **تبرير:** وضّح لماذا لا يُعد التبليط الظاهر في الشكل المجاور منتظمًا؟

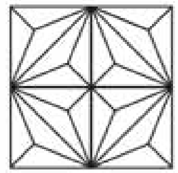


32) **تحدٍ:** ماذا تتوقع أن تكون قياسات الزوايا الداخلية لشكل خماسي حتى يستعمل في التبليط؟ وهل هذا التبليط منتظم أو شبه منتظم أو غير منتظم، وهل هو متسق أم غير متسق؟

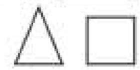
33) **اكتب:** اشرح كيف يستعمل التبليط في الفنون. وضمن إجابتك تفسيرًا يبين كيف يستعمل كل من المثلث متطابق الأضلاع والشكل السداسي المنتظم في التبليط. وضمن إجابتك أيضًا قائمة بأشكال هندسية أخرى تستعمل في التبليط. انظر فقرة "استعد" (صفحة145).

تدريب على اختبار معياري

34) أي من الأشكال التالية يمكن استعماله في تبليط الشكل أدناه؟



A 

B 

C 

D 

35) **مراجعة:** تشحن إحدى الشركات أجهزة حاسوب في صناديق خشبية وزن الواحد منها فارغًا يساوي 20kg. فإذا كان وزن جهاز الحاسوب لا يتجاوز 6kg، فأي المتباينات التالية تصف الوزن الكلي w للصندوق الخشبي الذي يحتوي العدد c من أجهزة الحاسوب؟

A $c \leq 6 + 20w$

B $c \geq 6w + 20$

C $w \leq 6c + 20$

D $w \geq 6c + 20$

مراجعة تراكمية

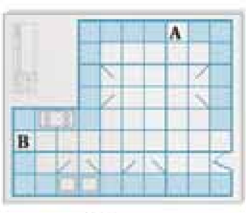
هندسة إحداثية: ارسم الصورة الناتجة من دوران كل من الأشكال التالية بزاوية قياسها 90° في الاتجاه المعطى حول مركز الدوران المذكور فيما يلي، وسمّ إحداثيات رؤوس الصورة: (الدرس 3-7)

36) $\triangle ABC$ الذي رؤوسه هي: $A(8, 1), B(2, -6), C(-4, -2)$، والدوران بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة $P(-2, 2)$.

37) $\triangle DEF$ الذي رؤوسه هي: $D(6, 2), E(6, -3), F(2, 3)$، والدوران مع اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة $P(3, -2)$.

38) $\square KLMN$ الذي رؤوسه هي: $K(-3, -5), L(3, 3), M(7, 0), N(1, -8)$، والدوران بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة $P(-2, 0)$.

39) **إعادة تصميم:** يبيّن الشكل المجاور رسمًا لمطبخ محمد. فإذا علمت أن كل مربع في الشكل يمثل المساحة 3ft × 3ft ويريد محمد أن ينقل مكان الثلاجة من المربع A إلى المربع B. صف هذا الانتقال. (الدرس 2-7)



استعد للدرس اللاحق

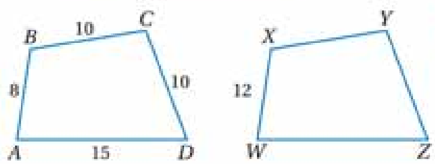
مهارة سابقة وضرورية: إذا كان $ABCD \sim WXYZ$ فأوجد كلًّا مما يلي: (الدرس 2-6)

40) معامل التشابه لـ $ABCD$ إلى $WXYZ$

41) XY

42) YZ

43) WZ



7-5 التمدّد
Dilation

الأفكار الرئيسية

- أحدد إذا كان التمدد تكبيرًا أو تصغيرًا أو تحويل تطابق.
- أحسب معامل التمدد.

المفردات

التمدد
dilation

تحويل التشابه
similarity transformation

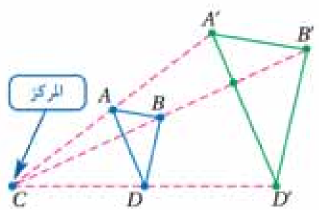
استعد

هل حاولت أن تضمن صورة في وثيقة إلكترونية ووجدت أنها أكبر مما هو مسموح به؟ هناك برامج حاسوبية عديدة تسمح لك بتغيير حجم الصورة لتصبح بالحجم المقبول. فتكبير الصورة أو تصغيرها هو مثال على التمدد.

تصنيف التمدد: ينتج من التحويلات التي درستها حتى الآن صور مطابقة للأصل. و**التمدد** نوع آخر من التحويلات حيث يُحدث تغييرًا في قياسات الشكل.

يتم تحديد التمدد بمعرفة مركز التمدد ومعامل التمدد. ويستعمل عادة الحرف r ليمثل معامل التمدد. ويبين الشكلان التاليان كيف يمكن أن يكون التمدد تكبيرًا أو تصغيرًا للشكل الأصلي:

$r = 2$



$\triangle A'B'D'$ هو تمدد لِـ $\triangle ABD$.

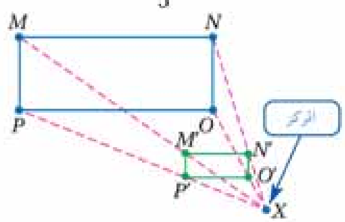
$CA' = 2(CA)$

$CB' = 2(CB)$

$CD' = 2(CD)$

وعليه، يكون $\triangle A'B'D'$ تكبيرًا لـ $\triangle ABD$.

$r = \frac{1}{3}$



المستطيل $M'N'O'P'$ هو تمدد للمستطيل $MNOP$.

$XM' = \frac{1}{3}(XM)$, $XN' = \frac{1}{3}(XN)$

$XO' = \frac{1}{3}(XO)$, $XP' = \frac{1}{3}(XP)$

وعليه يكون المستطيل $M'N'O'P'$ تصغيرًا للمستطيل $MNOP$.

إن قيمة العدد r تقرر إذا كان التمدد تكبيرًا أو تصغيرًا.

إرشادات

معامل التمدد

مفهوم معامل التمدد هو نفسه معامل التشابه ويطلق عليه أيضًا ثابت التناسب.

مفهوم أساسي — التمدد

إذا كانت $|r| > 1$ يكون التمدد تكبيرًا.

وإذا كانت $0 < |r| < 1$ يكون التمدد تصغيرًا.

وإذا كانت $|r| = 1$ يكون التمدد تحويل تطابق.

يحافظ التمدد على قياس الزوايا والبينية والاستقامة، لكنه لا يحافظ على قياس المسافات، إذ ينتج صورًا شبيهة بالأصل؛ أيْ أن التمدد هو **تحويل تشابه**. وهذا يعني أنه في الشكلين السابقين يكون:

$\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ وكذلك $\square MNOP \sim \square M'N'O'P'$. وينتج من هذا التشابه أن:

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'D'}{BD} = \frac{A'D'}{AD}$ و $\frac{M'N'}{MN} = \frac{N'O'}{NO} = \frac{O'P'}{OP} = \frac{M'P'}{MP}$. وبما أن النسبة بين قياسات الأجزاء المتناظرة تساوي القيمة المطلقة لمعامل التمدد $|r|$. لذا، فإن قيمة $|r|$ تقرر حجم الصورة مقارنة بالحجم الأصلي.

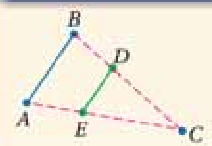
إرشادات

التمدد المطابق

إذا كان معامل التمدد يساوي 1، فإن الصورة الناتجة تكون مطابقة للأصل.

النظرية 7.2

إذا كان التمدد الذي مركزه C ومعامله r ينقل A إلى E، و B إلى D، فإن $ED = |r|(AB)$.



سوف تبرهن النظرية 7.2 في السؤال 37

مثال

حساب القياسات بعد التمدد

1 أوجد قياس الصورة $\overline{A'B'}$ الناتجة من التمدد أو قياس الأصل $\overline{AB}$ حسب المطلوب في كل مما يلي مستعملًا معامل التمدد المعطى:

a) $AB = 12, r = 2$

$A'B' = |r|(AB)$

$= 2(12)$ $|r| = 2, AB = 12$

$= 24$ بالضرب

b) $A'B' = 36, r = \frac{1}{4}$

$A'B' = |r|(AB)$

$36 = \frac{1}{4}(AB)$ $A'B' = 36, |r| = \frac{1}{4}$

$144 = AB$ ضرب الطرفين في العدد 4

تحقق من فهمك

1A) $A'B' = 5, r = \frac{1}{4}$ **1B)** $AB = 3, r = 3$

عندما يكون معامل التمدد سالبًا، تكون الصورة على الجهة المقابلة للأصل من مركز التمدد.

مفهوم أساسي

التمدد

إذا كان $r > 0$، فإن A' تقع على $\overrightarrow{CA}$، ويكون $CA' = r \cdot CA$.

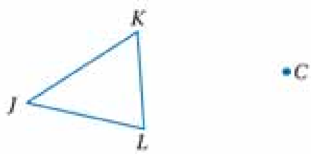
وإذا كان $r < 0$، فإن A' تقع على $\overrightarrow{CA'}$ (الشعاع المعاكس لـ $\overrightarrow{CA}$)، ويكون $CA' = |r| \cdot CA$.

ويكون مركز التمدد دائمًا صورة نفسه.

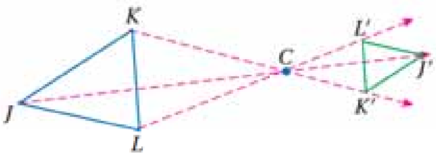
مثال

رسم تمدد

2 ارسم صورة $\triangle JKL$ الناتجة من التمدد الذي مركزه C، ومعامله $r = -\frac{1}{2}$.



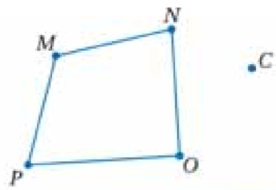
بما أن $0 < |r| < 1$، فإن التمدد يكون تصغيرًا للمثلث $\triangle JKL$.



ارسم $\overline{CJ}, \overline{CK}, \overline{CL}$. وبما أن r سالبة، فإن J', K', L' سوف تقع على $\overrightarrow{CJ'}, \overrightarrow{CK'}, \overrightarrow{CL'}$ على الترتيب. والآن عين J', K', L' بحيث تكون $CJ' = \frac{1}{2}(CJ)$

$CK' = \frac{1}{2}(CK), CL' = \frac{1}{2}(CL)$

ثم ارسم $\triangle J'K'L'$.



تحقق من فهمك

2) ارسم صورة الشكل الرباعي $MNOP$ تحت تأثير التمدد الذي مركزه C ومعامله $r = \frac{3}{4}$.

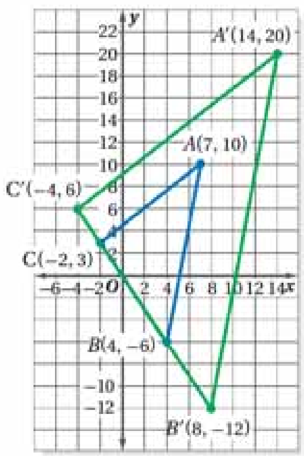
يمكنك تحديد إحداثيات الصورة الناتجة من تمدد مركزه نقطة الأصل لأي شكل في المستوى الإحداثي باستعمال معامل التمدد.

النظرية 7.3

صورة النقطة $P(x, y)$ الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله r ، هي $P'(rx, ry)$.

سوف تبرهن النظرية 7.3 في السؤال 38.

مثال **التمدد في المستوى الإحداثي**



3 **هندسة إحداثية:** ارسم المثلث ABC الذي رؤوسه: $A(7, 10), B(4, -6), C(-2, 3)$ وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 2، واكتب على الرسم إحداثيات الرؤوس.

الصورة $(2x, 2y)$	النقطة الأصلية (x, y)
$A'(14, 20)$	$A(7, 10)$
$B'(8, -12)$	$B(4, -6)$
$C'(-4, 6)$	$C(-2, 3)$

تحقق من فهمك

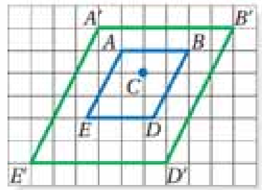
3) ارسم الشكل الرباعي $DEFG$ الذي رؤوسه:
$D(-1, 3), E(2, 0), F(-2, -1), G(-3, 1)$
وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله يساوي $\frac{3}{2}$، واكتب على الرسم إحداثيات الرؤوس.

حساب معامل التمدد: تعلمت في الفصل 6 كيف تحسب معامل التشابه للأشكال المتشابهة. فإذا كنت تعرف قياسات الشكل وقياسات الصورة الناتجة عن تمدده، فبإمكانك أن تحسب معامل تمدده.

مثال — حساب معامل التمدد

4 احسب معامل التمدد الذي مركزه C، ثم حدد إذا كان التمدد تكبيرًا أم تصغيرًا أم تحويل تطابق.

(a

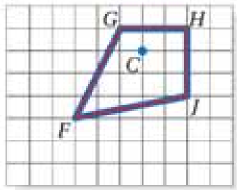


$$\text{معامل التمدد} = \frac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الأصل}}$$

$$2 = \frac{6 \text{ وحدات}}{3 \text{ وحدات}} \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{طول الصورة} \\ \rightarrow \text{طول الأصل} \end{matrix}$$

وبما أن معامل التمدد أكبر من 1، فإن التمدد تكبير.

(b



$$\text{معامل التمدد} = \frac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الأصل}}$$

$$1 = \frac{4 \text{ وحدات}}{4 \text{ وحدات}} \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{طول الصورة} \\ \rightarrow \text{طول الأصل} \end{matrix}$$

وبما أن معامل التمدد يساوي 1، فإن التمدد تحويل تطابق.

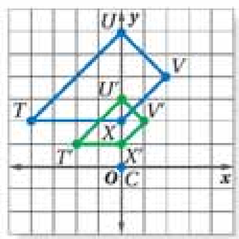
إرشادات

مراجعة

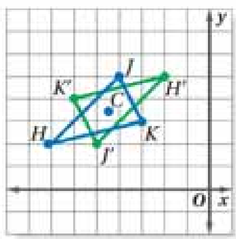
لمراجعة مقياس الرسم ارجع إلى الدرس 2-6.

تحقق من فهمك

(4A



(4B



مثال من واقع الحياة — مقياس الرسم

5 **فنون:** يريد يعقوب أن يرسم لوحة جدارية، طولها 8ft وعرضها 4ft على ورقة رسم. فإذا قرر أن يستعمل معاملًا للتمدد قيمته $\frac{1}{6}$، فما بُعدا ورقة الرسم التي يجب أن يستعملها مما يلي ؟

(A $8\frac{1}{2}$ in $\times$ 11 in (B 11 in $\times$ 14 in (C 11 in $\times$ 17 in

بُعدا اللوحة الجدارية معطاة بالأقدام، وبعدا الرسم على الورقة بالبوصات. لذا، فإن الخطوة الأولى هي تحويل بُعدي اللوحة الجدارية من أقدام إلى بوصات:

الخطوة 1، حوّل الأقدام إلى بوصات. $4\text{ ft} = 4(12) = 48\text{ in}$

$8\text{ ft} = 8(12) = 96\text{ in}$

الخطوة 2، استعمل معامل التمدد لحساب بعدي الصورة على الورقة.

العرض: $w = \frac{1}{6}(48) = 8$ الطول: $\ell = \frac{1}{6}(96) = 16$

الخطوة 3، بُعدا الصورة على الورقة هما $8\text{in} \times 16\text{in}$. لذا على يعقوب أن يستعمل ورقة بُعداها $11\text{in} \times 17\text{in}$ وبذلك فإن الإجابة الصحيحة هي C.

تحقق من فهمك

5) استعمل جميل برنامجًا لتصغير ملصق بُعداه $1\text{m} \times 1.5\text{m}$ إلى صورة بُعداها $10\text{cm} \times 15\text{cm}$. ما مقياس الرسم الذي استعمله؟

تأكد

مثال 1 (ص 152)

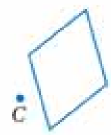
أوجد طول الصورة $\overline{A'B'}$ الناتجة من التمدد أو طول الأصل $\overline{AB}$ حسب المطلوب في كل مما يلي باستعمال معامل التمدد المعطى في السؤال:

1) $AB = 3, r = 4$ **2)** $A'B' = 8, r = -\frac{2}{5}$

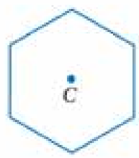
مثال 2 (ص 152-153)

ارسم الصورة الناتجة من التمدد الذي مركزه C ومعامله المعطى في كل مما يلي:

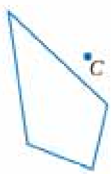
3) $r = 4$



4) $r = \frac{1}{5}$



5) $r = -2$



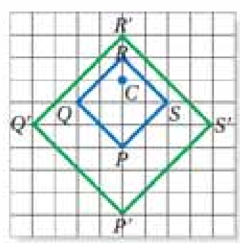
مثال 3 (ص 153)

6) أوجد صورة القطعة $\overline{PQ}$ التي طرفاها هما: $P(9, 0)$, $Q(0, 6)$. والناتجة عن التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله $r = \frac{1}{3}$، ثم ارسم الأصل والصورة.

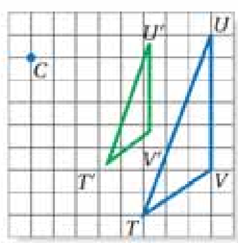
مثال 4 (ص 154)

احسب معامل التمدد المستعمل في التمدد الذي مركزه C، ثم حدّد إذا كان التمدد تكبيرًا أو تصغيرًا أو تحويل تطابق:

7)



8)



مثال 5 (ص 154-155)

9) **بستنة،** حديقة سعد مستطيلة الشكل بعداها $6\text{m} \times 4\text{m}$. فإذا عمل سعد مخططًا لها بلغ طولها عليه 20 cm، فكم سنتمترًا يبلغ عرضها؟

تمارين ومسائل

مساعدة الواجب المنزلي

للأسئلة	انظر الأمثلة
10-15	1
16-19	3
20-25	2
26-31	4
47-49	5

احسب طول الصورة $\overline{S'T'}$ الناتجة من التمدد، أو طول الأصل $\overline{ST}$ حسب المطلوب في كل مما يلي باستعمال معامل التمدد المعطى:

(10 $ST = 6, r = -1$ **(11** $ST = \frac{4}{5}, r = \frac{3}{4}$ **(12** $S'T' = 12, r = \frac{2}{3}$

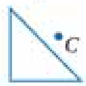
(13 $S'T' = \frac{12}{5}, r = \frac{-3}{5}$ **(14** $ST = 32, r = \frac{-5}{4}$ **(15** $ST = 2.25, r = 0.4$

هندسة إحداثية: أوجد الصورة الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 2، ثم الصورة الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله $\frac{1}{2}$ لكل شكل أعطيت رؤوسه فيما يلي:

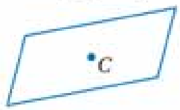
(16 $F(3, 4), G(6, 10), H(-3, 5)$ **(17** $X(1, -2), Y(4, -3), Z(6, -1)$

(18 $P(1, 2), Q(3, 3), R(3, 5), S(1, 4)$ **(19** $K(4, 2), L(-4, 6), M(-6, -8), N(6, -10)$

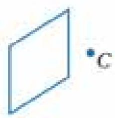
ارسم الصورة الناتجة عن تمدد كل شكل فيما يلي إذا كان مركز تمدده C، ومعامله كما هو مشار إليه:

(20 $r = 3$


(21 $r = 2$

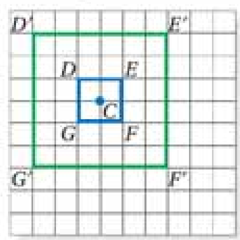

(22 $r = \frac{1}{2}$


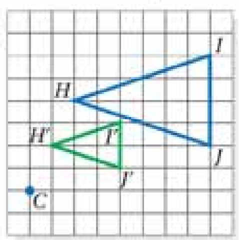
(23 $r = \frac{2}{5}$

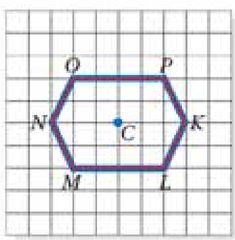

(24 $r = -1$


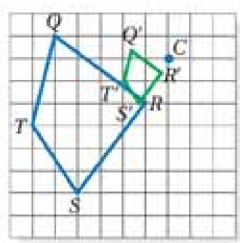
(25 $r = -\frac{1}{4}$

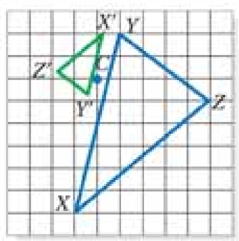

احسب معامل التمدد الذي مركزه C في كل مما يلي، وحدّد إذا كان تكبيرًا أو تصغيرًا أو تحويل تطابق:

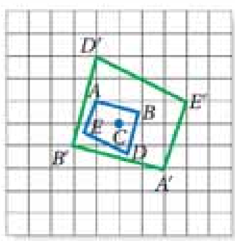
(26


(27


(28


(29


(30


(31


تصوير: استعمل المعلومات التالية لحل السؤالين 32 و 33:

لوحة مستطيلة الشكل بُعداها 14 in × 10 in، تمّ تصغيرها على آلة التصوير بمعامل 75%.

(32 ما البعدان الجديدان للوحة؟

(33 ما التغير الذي طرأ على المساحة الأصلية؟

الربط مع واقع الحياة

تختلف الطائرات في شكلها وتصميمها وسرعتها وأبعادها... إلخ.

34) **نماذج:** يبني أحمد نموذجًا لطائرة البعد بين جناحيها 55 ft و 7 in. فإذا كانت المسافة بين جناحي النموذج تساوي 14in، فما معامل التمدد لهذا النموذج؟

35) **تصميم:** تريد هدى أن تصمم مجلة للصف تتضمن صورة لا يزيد بعداها عن $6\text{cm}\times 8\text{cm}$. فإذا كان لديها صورة بعداها $10\text{cm}\times 12\text{cm}$، فما معامل التمدد المناسب لتصغير الصورة الذي يجب عليها استعماله للحصول على أكبر صورة يمكن وضعها في المجلة؟

36) **هندسة إحداثية:** رؤوس المثلث ABC هي: $A(12, 4), B(4, 8), C(8, -8)$. وبعد تمددين متعاقبين مركزاهما نقطة الأصل، ومعاملاهما متساويان، أصبحت إحداثيات رؤوس الصورة الأخيرة على النحو التالي: $A''(3, 1), B''(1, 2), C''(2, -2)$. حدّد معامل التمدد r الذي ينقل $\triangle ABC$ إلى $\triangle A''B''C''$.

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكل مما يلي:

37) النظرية 7.2

38) النظرية 7.3

التصوير الرقمي: استعمل المعلومات التالية لحل الأسئلة 41-39:

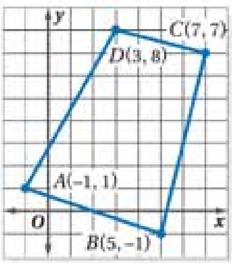
ترغب أسماء في تعديل صورة رقمية طولها 640 وحدة، وعرضها 480 وحدة على شاشتها:

39) إذا كبرت أسماء الصورة على الشاشة بمعامل تمدد مقداره 150%، فما بُعدا الصورة الناتجة؟

40) إذا رغبت أسماء في أن يكون طول الصورة 32 وحدة، فما مقياس الرسم الذي ستستعمله؟

41) إذا رغبت أسماء في أن يكون عرض الصورة 600 وحدة، فما مقياس الرسم الذي ستستعمله؟

استعمل الشكل الرباعي $ABCD$ على اليسار لحل الأسئلة 44-42:



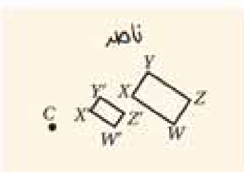
42) أوجد محيط الشكل الرباعي ABCD.

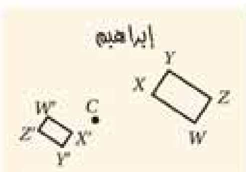
43) ارسم الصورة الناتجة عن تمدد الشكل الرباعي $ABCD$ حول نقطة الأصل بمعامل تمدد مقداره 2−.

44) احسب محيط الشكل الرباعي $A'B'C'D'$ (الناتج عن التمدد) وقارنه بمحيط الشكل الرباعي $ABCD$.

مسائل مهارات التفكير العليا

45) **اكتشف الخطأ:** يحاول كل من ناصر وإبراهيم أن يصف تأثير القيمة السالبة لمعامل التمدد في صورة الشكل الرباعي $WXYZ$. فأيهما تفسيره صحيح؟ اشرح تبريرك.

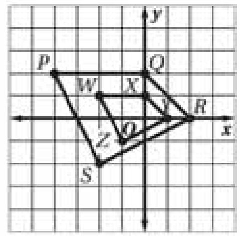




46) **اكتب:** استعمل المعلومات المعطاة في الصفحة 151 عن أجهزة الحاسوب لتشرح كيف يمكن استعمال التمدد عند استعمال جهاز الحاسوب. وبالإضافة إلى الأمثلة الأخرى، ضمّن إجابتك تفسيرًا يبين كيف يمكن أن تكون عملية القص واللصق مثالًا على التمدد.

تدريب على اختبار معياري

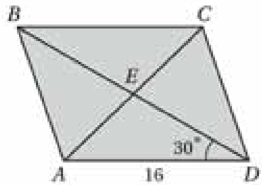
47) إذا كان الشكل الرباعي $WXYZ$ ناتج عن تمدد الشكل الرباعي $PQRS$.فأي الآتية يمثل أفضل تقريب لمعامل التمدد الذي تم استعماله؟



A -2 B $-\frac{1}{2}$

C 2 D $\frac{1}{2}$

48) إذا كان الشكل $ABCD$ معين، فكم وحدة مربعة مساحة $\triangle AED$؟



A $16\sqrt{2}$

B 64

C $32\sqrt{3}$

D $64\sqrt{3}$

49) **مراجعة:** كم ملليلترًا من الماء الصافي يتطلب إضافته إلى 50 ملليتر من محلول ملحي نسبة الملح فيه 15% لتصبح نسبة الملح 10% ؟

A 25 B 15

C 20 D 5

مراجعة تراكمية

قرر إذا كان الحصول على تبليط شبه منتظم ممكنًا أم لا من كل شكل مما يلي، مفترضًا أن المضلعات المذكورة منتظمة وطول ضلع كل منها وحدة واحدة: (الدرس 4-7)

50) مثلث وخماسي.

51) مضلع ثماني ومضلع سداسي.

52) مربع ومثلث.

53) سداسي ومضلع عدد أضلاعه 12.

هندسة إحداثية: **ارسم الصورة الناتجة من دوران كل شكل مما يلي بزاوية قياسها °90 حول مركز الدوران المعطى وفي الاتجاه المذكور في كل سؤال، واكتب إحداثيات الرؤوس:** (الدرس 3-7)

54) $\triangle ABC$ الذي رؤوسه: $A(7, -1), B(5, 0), C(1, 6)$ والدوران بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة $P(-1, 4)$

55) $\square DEFG$ الذي رؤوسه: $D(-4, -2), E(-3, 3), F(3, 1), G(2, -4)$ والدوران باتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة $P(-4, -6)$.

56) **بناء:** يقوم عمر بتوسعة منزله، ويريد أن يعمل فتحة في الحائط لوضع نافذة، فقام بقياس الأضلاع المتقابلة للفتحة ليتحقق من تساوي قياسي كل ضلعين متقابلين، ثم قاس القطرين ليتحقق من تساوي طوليهما أيضًا. فهل هذا كافٍ لضمان أن تكون الفتحة مستطيلة الشكل؟ فسر إجابتك. (الدرس 4-5)

الفصل 7

دليل الدراسة والمراجعة

المَطْوِيّاتُ منظم أفكار — استعد

تحقق من أن هذه المفاهيم الأساسية التالية مدونة في مطويتك.

المفاهيم الأساسية

الانعكاس والإزاحة والدوران (الدروس 1-7 إلى 3-7)

- محور التناظر لشكل ما هو الخط المستقيم الذي يمكن طي الشكل عنده للحصول على نصفين متطابقين تمامًا.
- الإزاحة تنقل جميع نقاط الشكل مسافات متساوية وفي الاتجاه نفسه.
- يمكن تمثيل الإزاحة بتركيب انعكاسين.
- يقوم الدوران بتدوير كل نقطة في الشكل بالزاوية نفسها حول نقطة ثابتة هي مركز الدوران.
- يكون للشكل تماثل دوراني عندما تستطيع تدويره بزاوية قياسها أقل من $360°$ وتكون الصورة مطابقة تمامًا للأصل.

التبليط (الدرس 4-7)

- التبليط هو نمط متكرر يغطي المستوى دون فراغات أو تداخلات.
- يحتوي التبليط المنتظم الترتيبات نفسها لمجموعة من الأشكال والزوايا حول كل رأس.

التمدد (الدرس 5-7)

- يمكن أن يكون التمدد تكبيرًا أو تصغيرًا أو تحويل تطابق.

المفردات الرئيسة

زاوية الدوران (ص 136)	الانعكاس (ص 123)
مركز الدوران (ص 136)	التبليط المنتظم (ص 146)
تركيب (ص 131)	الدوران (ص 136)
التمدد (ص 151)	التماثل الدوراني (ص 139)
النقاط الثابتة (ص 142)	التبليط شبه المنتظم (ص 147)
تحويل التطابق (ص 123)	تحويل التشابه (ص 152)
خط الانعكاس (ص 123)	التبليط (ص 145)
محور التناظر (ص 126)	الإزاحة (ص 130)
نقطة التناظر (ص 126)	التبليط المتسق (ص 146)
التقايس المباشر (ص 141)	
التقايس غير المباشر (ص 141)	

التأكد من المفردات

اذكر إذا كانت العبارة صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فضع كلمة أو عددًا بدلًا مما تحته خط لتجعلها صحيحة:

1) التمدد يمكن أن يغير المسافة بين كل نقطة من نقاط الشكل ومحور التناظر.

2) يكون التبليط متسقًا إذا كانت ترتيبات الأشكال والزوايا حول كل رأس هي نفسها.

3) يتم في الدوران تدوير الشكل حول نقطة التناظر.

4) الانعكاس هو تحويل يحدد بالشكل وخط مستقيم.

الفصل 7

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

7-1 الانعكاس (الصفحات 129–123)

ارسم كلًّا من الأشكال التالية وصورته الناتجة عن الانعكاس المذكور:

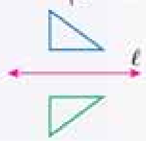
5) المثلث ABC الذي رؤوسه: $A(2, 1), B(5, 1), C(2, 3)$ حول محور السينات.

6) متوازي الأضلاع $WXYZ$ الذي رؤوسه: $W(-4, 5), X(-1, 5), Y(-3, 3), Z(-6, 3)$ حول الخط المستقيم $y = x$.

7) المستطيل $EFGH$ الذي رؤوسه: $E(-4, -2),$ $F(0, -2), G(0, -4), H(-4, -4)$ حول الخط المستقيم $x = 1$.

8) **نمل:** تمشي 12 نملة على مرآة. إذا علمت أن لكلٍّ منها 6 أرجل، فكم رجلًا يمكن رؤيتها خلال هذه الرحلة؟

مثال 1 انقل الشكل التالي إلى دفترك، ثم ارسم صورة انعكاسه حول الخط المستقيم ℓ:



المثلث الأخضر هو صورة المثلث الأزرق تحت تأثير الانعكاس حول المستقيم ℓ.

7-2 الإزاحة (الانسحاب) (الصفحات 135–130)

ارسم كلًّا من الأشكال التالية وصورته الناتجة عن الإزاحة المذكورة:

9) الشكل الرباعي $EFGH$ الذي رؤوسه: $E(2, 2),$ $F(6, 2), G(4, -2), H(1, -1)$ والإزاحة: $(x, y) \rightarrow (x - 4, y - 4)$

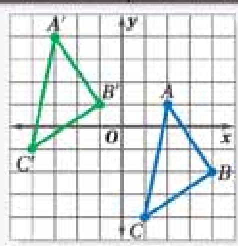
10) $\overline{ST}$ التي طرفاها $S(-3, -5), T(-1, -1)$، والإزاحة: $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 4)$

11) $\triangle XYZ$ الذي رؤوسه: $X(2, 5), Y(1, 1), Z(5, 1)$ والإزاحة: $(x, y) \rightarrow (x + 1, y - 3)$.

12) **غرفة الصف:** يوجد في غرفة أحد الصفوف 30 مقعدًا مرتبة في 6 أعمدة و 5 صفوف. نقل المعلم الطالب أحمد من المقعد الأول في الصف الثاني على اليمين إلى المقعد الأخير في الصف الأخير على اليسار. صف عملية الإزاحة هذه.

مثال 2 **هندسة إحداثية:** المثلث ABC رؤوسه: $A(2, 1), B(4, -2), C(1, -4)$. ارسم $\triangle ABC$ وصورته الناتجة من الإزاحة: $(x, y) \rightarrow (x - 5, y + 3)$

(x, y)	$(x - 5, y + 3)$
(2, 1)	(−3, 4)
(4, −2)	(−1, 1)
(1, −4)	(−4, −1)



لقد حركت هذه الإزاحة كل نقطة في المثلث الأصلي 5 وحدات إلى اليسار و 3 وحدات إلى الأعلى.

7-3 الدوران (الصفحات 143–136)

ارسم الصورة الناتجة عن دوران كل مثلث باستعمال انعكاسين متعاقبين في المستقيمين المعطيين، واكتب إحداثيات رؤوس الصورة وزاوية الدوران:

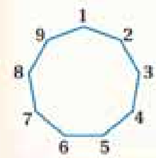
13) $\triangle BCD$ الذي رؤوسه: $B(-3, 5), C(-3, 3), D(-5, 3)$ والانعكاس حول محور السينات، ثم حول محور الصادات.

14) $\triangle FGH$ الذي رؤوسه: $F(0, 3), G(-1, 0), H(-4, 1)$ والانعكاس حول الخط المستقيم $y = x$، ثم حول الخط المستقيم $y = -x$

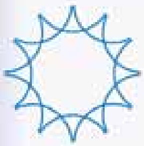
قوارب بخارية: يبيّن الشكل عجلة بدّالات تُستعمل في القوارب البخارية. وتتكون هذه العجلة من 9 بدالات موزعة على مسافات متساوية.

15) اذكر رتبة التماثل الدوراني ومقداره.

16) ما قياس زاوية الدوران الذي يحرك البدالة 2 بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة إلى الموقع الحالي للبدّالة 6؟



مثال 3 اذكر رتبة التماثل الدوراني ومقداره للشكل أدناه:



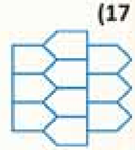
رتبة التماثل الدوراني لهذا الشكل هي 12؛ لأن هناك 12 دورانًا أقل من $360°$ (بما فيها $0°$) ينتج عنها صورة مطابقة للأصل.

ومقدار التماثل الدوراني يساوي: $360° \div 12 = 30°$.

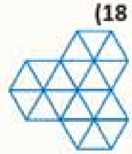
7-4 التبليط (الصفحات 150–145)

قرر إذا كان النمط الظاهر فيما يلي تبليطاً أم لا، وإذا كان كذلك فصنفه إلى متماثل أو غير متماثل، ومنتظم أو غير منتظم.

17)



18)



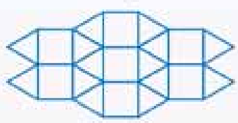
19)

تصميم داخلي: حدد إذا كانت كل بلاطة مضلعة منتظمة فيما يلي يمكن استعمالها لتبليط أرضية الحمام أم لا. وضح إجابتك.

20) ذات شكل خماسي **21)** مثلثة الشكل

22) ذات عشرة أضلاع

مثال 4 صنّف التبليط التالي:



التبليط متسق لوجود مربعين وثلاثة مثلثات متطابقة الأضلاع حول كل رأس، والمربعات والمثلثات متطابقة الأضلاع مضلعات منتظمة.

والتبليط شبه منتظم لاحتوائه على أكثر من شكل واحد من المضلعات المنتظمة.

الفصل

7 دليل الدراسة والمراجعة

7-5 التمدد (الصفحات 151–158)

أوجد قياس الصورة $\overline{C'D'}$، أو الأصل $\overline{CD}$ تحت تأثير التمدد فيما يلي مستعملًا معامل التمدد المعطى:

23) $CD = 8, r = 3$

24) $CD = \frac{2}{3}, r = -6$

25) $C'D' = 24, r = 6$

26) $C'D' = 60, r = \frac{10}{3}$

27) $CD = 12, r = -\frac{5}{6}$

28) $C'D' = \frac{55}{2}, r = \frac{5}{4}$

أوجد صورة كل مضلع أعطيت رؤوسه تحت تأثير التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله 2- فيما يلي:

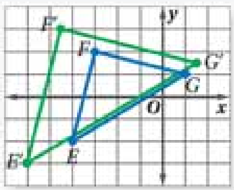
29) $P(-1, 3), Q(2, 2), R(1, -1)$

30) $E(-3, 2), F(1, 2), G(1, -2), H(-3, -2)$

31) **تصوير:** طول أحد الأشخاص 175cm. فإذا كان طوله في إحدى الصور يساوي 8cm، فما معامل التمدد للصورة بالتقريب؟

مثال 5 لديك المثلث EFG الذي رؤوسه $E(-4, -2), F(-3, 2), G(1, 1)$. أوجد صورة $\triangle EFG$ تحت تأثير تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله $\frac{3}{2}$.

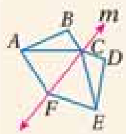
(x, y)	$\left(\frac{3}{2}x, \frac{3}{2}y\right)$
$E(-4, -2)$	$E'(-6, -3)$
$F(-3, 2)$	$F'\left(-\frac{9}{2}, 3\right)$
$G(1, 1)$	$G'\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$



الفصل

7 اختبار الفصل

سمّ صورة كل من الأشكال التالية تحت تأثير الانعكاس في الخط المستقيم m:



1) A 2) $\overline{BC}$

3) $\triangle DCE$

هندسة إحداثية: ارسم كل شكل وصورته بالإزاحة المعطاة:

4) $\triangle PQR$ الذي رؤوسه هي : $P(-3, 5)$, $Q(-2, 1)$, $R(-4, 2)$ والإزاحة 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى الأعلى.

5) متوازي الأضلاع $WXYZ$ الذي رؤوسه هي: $W(-2, -5), X(1, -5), Y(2, -2), Z(-1, -2)$ والإزاحة 5 وحدات إلى الأعلى و 3 وحدات إلى اليسار.

6) $\overline{FG}$ حيث: $F(3, 5)$, $G(6, -1)$ والإزاحة:

$$(x, y) \rightarrow (x - 4, y - 1)$$

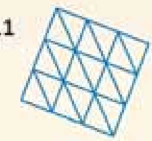
ارسم الصورة الناتجة عن تأثير الانعكاسين في المستقيمين المعطيين، ثم اكتب إحداثيات رؤوس الصورة وزاوية الدوران:

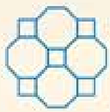
7) $\triangle JKL$ الذي رؤوسه هي: $J(-1, -2), K(-3, -4), L(1, -4)$ والانعكاس حول محور الصادات، ثم حول محور السينات.

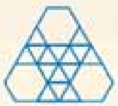
8) $\triangle ABC$ الذي رؤوسه هي: $A(-3, -2), B(-1, 1), C(3, -1)$ والانعكاس حول الخط المستقيم $y = x$، ثم حول الخط المستقيم $y = -x$.

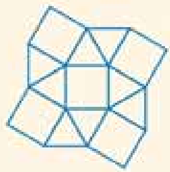
9) $\triangle RST$ الذي رؤوسه هي: $R(1, 6), S(1, 1), T(3, -2)$ والانعكاس حول محور الصادات، ثم حول الخط المستقيم $y = x$.

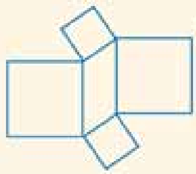
حدد فيما يلي إذا كان النمط تبليطًا أم لا، وإذا كان كذلك فصنفه إلى متماثل أو غير متماثل، ومنتظم أو غير منتظم أو شبه منتظم:

10) 

11) 

12) 

13) 

14) 

أوجد قياس الصورة $\overline{M'N'}$ أو الأصل $\overline{MN}$ تحت تأثير التمدد المعطى معامله فيما يلي:

15) $MN = 5, r = 4$

16) $MN = 8, r = \frac{1}{4}$

17) $M'N' = 36, r = 3$

18) $MN = 9, r = -\frac{1}{5}$

19) $M'N' = 20, r = \frac{2}{3}$

20) $M'N' = \frac{29}{5}, r = -\frac{3}{5}$

21) $MN = 35, r = \frac{2}{7}$

22) $M'N' = 14, r = -7$

23) **أسفار:** يحاول خالد أن يحسب المسافة التي سيقطعها ليصل إلى البلدة المجاورة. فإذا كانت المسافة على الخريطة بين البلدتين تساوي 2.25in، وكان مقياس الرسم للخريطة التي استعملها خالد هو 1in لكل 150mi، فما المسافة التي سيقطعها؟

24) **اختيار من متعدد:** ما الانعكاس الذي يجعل النقطة $(3, 4)$ صورة لـ $(3, -4)$؟

I انعكاس حول محور السينات

II انعكاس حول محور الصادات

III انعكاس حول نقطة الأصل

A I فقط

B III فقط

C I و III

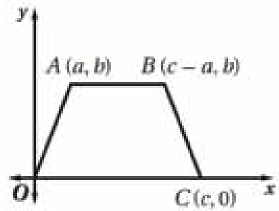
D I و II

اختبار معياري تراكمي

الفصول 1-7

أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

1) الشكل $ABCO$ شبه منحرف متطابق الساقين.



أي مما يلي إحداثيات الطرف الأيمن للقطعة المتوسطة في شبه المنحرف $ABCO$؟

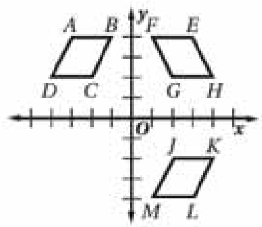
A $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$

B $\left(\frac{2c-a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

C $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$

D $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

2) أي العبارات التالية المتعلقة بالأشكال أدناه صحيحة؟



A متوازي الأضلاع $JKLM$ هو انعكاس لـ $\square ABCD$.

B متوازي الأضلاع $EFGH$ هو إزاحة لـ $\square ABCD$.

C متوازي الأضلاع $JKLM$ هو إزاحة لـ $\square EFGH$.

D متوازي الأضلاع $JKLM$ هو إزاحة لـ $\square ABCD$.

3) رؤوس $\triangle JKL$ هي: $J(-5, 3), K(1, 4), L(-3, -2)$.
فإذا انعكس $\triangle JKL$ حول محور السينات وكانت صورته هي $\triangle MPQ$، فما إحداثيات رؤوس $\triangle MPQ$؟

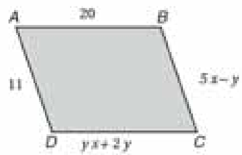
A $M(-5, -3), P(1, -4), Q(-3, 2)$

B $M(-3, 5), P(-4, -1), Q(2, 3)$

C $M(3, -5), P(4, 1), Q(-2, -3)$

D $M(5, 3), P(-1, 4), Q(3, -2)$

4) ما قيمة كل من x, y التي تجعل الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع؟



A $x=4, y=3$

B $x=\frac{31}{9}, y=\frac{11}{9}$

C $x=3, y=4$

D $x=\frac{11}{9}, y=\frac{31}{9}$

5) ما ميل المستقيم المار بالنقطتين $(3, 3)$ و $(-3, -3)$؟

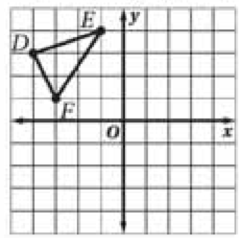
A 1

B -1

C 3

D -3

6) إذا أزيح $\triangle DEF$ حسب القاعدة $(x,y) \rightarrow (x+1, y-7)$، فما إحداثيات D'؟



A $(3, 4)$ C $(-4, -3)$

B $(-3, -4)$ D $(4, -3)$

7) يعبِّر عن المعاكس الإيجابي للعبارة $q \rightarrow p$ بالشكل:

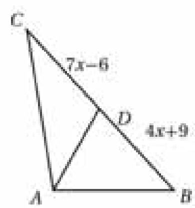
A $q \rightarrow p$

B $\sim p \rightarrow \sim q$

C $\sim q \rightarrow \sim p$

D $\sim q \rightarrow p$

8) ماقيمة x إذا كانت $\overline{AD}$ قطعة متوسطة للمثلث ABC ؟



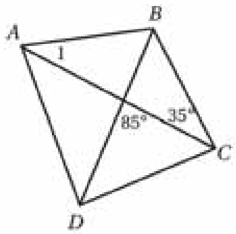
A 2.1

B 4

C 5

D 7

9) إذا كانت $\overline{BD}$ تنصّف $\angle ABC$ فما $m\angle 1$؟



A 35

B 45

C 50

D 120

سؤال ذو مستوى متقدم

سجل إجابتك على ورقة، مبينًا خطوات الحل.

10) يدرس أحمد الهندسة المعمارية، وقد رسم مخططًا لمتنزه رؤوسه: $Q(2, 2), R(-2, 4), S(-3, -3), T(3, -4)$. ولكنه لاحظ أن اتجاه رسمه غير صحيح حيث ظهر الشمال في أسفل الرسم بدلًا من أن يكون في أعلى الرسم.

A ما التحويل الذي يستطيع أحمد تطبيقه على مخططه ليجعل الشمال في أعلى الرسم؟

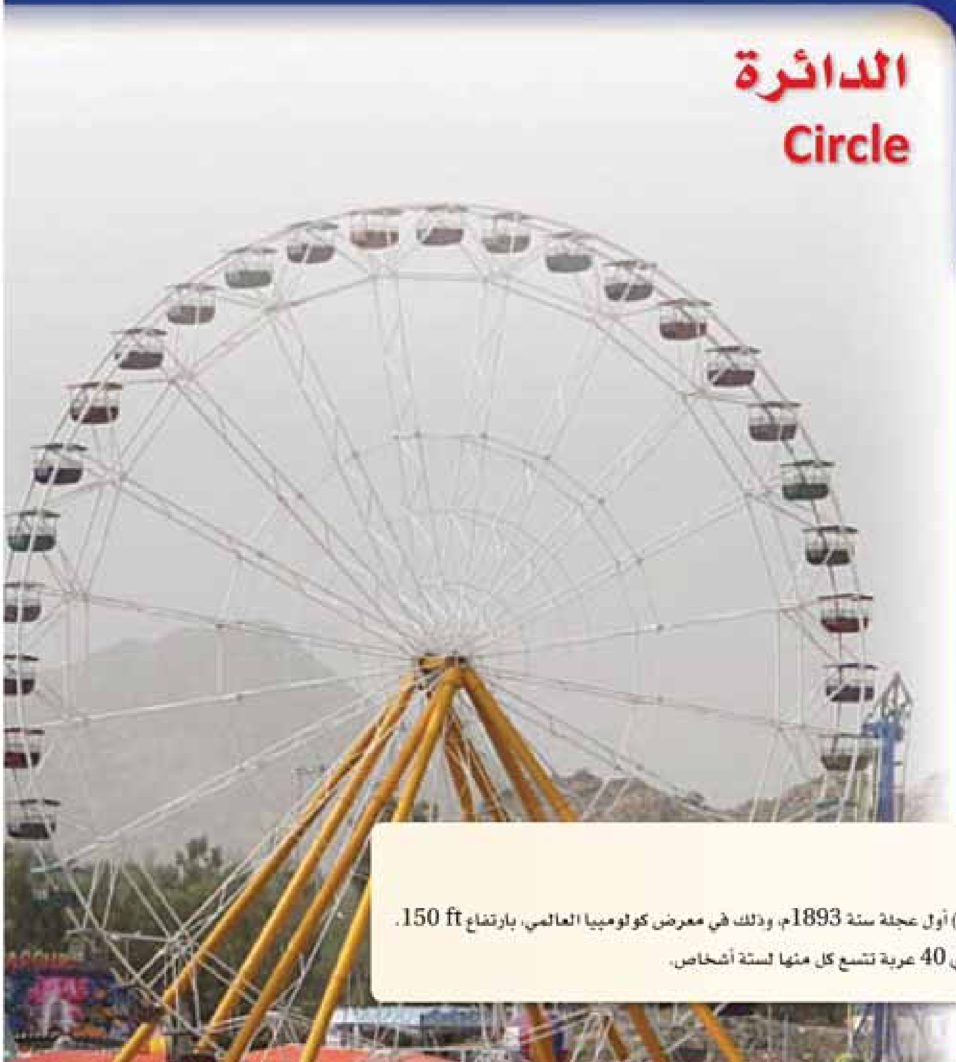
B هل هذا هو التحويل الوحيد الذي يجعل الشمال في أعلى الرسم؟ وضح إجابتك.

C ارسم الشكل الرباعي $QRST$، واكتب إحداثيات رؤوسه.

D ارسم الصورة $Q'R'S'T'$ بعد التحويل واكتب إحداثيات رؤوسها.

E فسر كيف يمكن لأحمد أن يعرف إحداثيات رؤوس الصورة دون استخدام المستوى الإحداثي.

هل تحتاج لمساعدة إضافية؟										
إذا أخطأت في السؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
فعد إلى ...	5−7	7−2	7−1	5−2	2−3	7−2	1−3	4−1	3−2	7−3



الفصل **8**

الدائرة
Circle

الأفكار العامة

- أتعرف عناصر الدائرة، وأحل مسائل تتضمن محيط الدائرة.
- أجد أطوال أقواس وقياسات زوايا في الدائرة.
- أجد أطوال قطع مستقيمة في الدائرة.
- أكتب معادلة الدائرة.

المفردات الأساسية

- **الوتر** chord (ص 168)
- **المحيط** circumference (ص 170)
- **القوس** arc (ص 178)
- **المماس** tangent (ص 202)
- **القاطع** secant (ص 213)

الربط مع الحياة:

عجلات (فيريس): بنى البحار (فيريس) أول عجلة سنة 1893م، وذلك في معرض كولومبيا العالمي، بارتفاع 150 ft، وقطر هذه العجلة يساوي 140 ft، ويحوي 40 عربة تتسع كل منها لستة أشخاص.

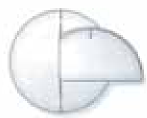
المَطْوِيَّاتُ
مُنظِّم أفكار

الدوائر: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك، ابدأ بخمس ورقات بقياس A4 ثم قصّ خمس دوائر كبيرة متطابقة.

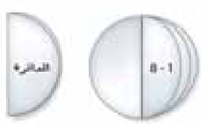
1 **اطوِ** دائرتين من المنتصف، واعمل شقًا طوله 2 cm عند طرفي خط الطي.

2 **اطوِ** الدوائر الثلاث المتبقية في المنتصف، واعمل شقًا في منتصف خط الطي.

3 **أدخل** الدائرتين المشقوقتين عند طرفي الثنية في الدوائر المشقوقة في منتصف خط الطي.



4 **اطوِ** لعمل كتيب، اكتب على الغلاف عنوان الفصل، أما بقية الصفحات فرقمها بأرقام الدروس.



التهيئة للفصل 8

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي. ارجع إلى «المراجعة السريعة» لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مهارة سابقة)

1) $\frac{4}{9}p = 72$

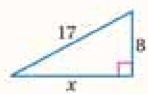
2) $6.3p = 15.75$

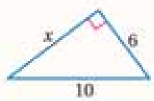
3) $3x + 12 = 8x$

4) $7(x+2) = 3(x-6)$

5) يُعطى محيط الدائرة بالعلاقة $C = 2\pi r$. حُلّ هذه المعادلة لإيجاد r.

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

6) 

7) 

8) إذا علمت أن طول أحد ضلعي المثلث المتطابق الضلعين والقائم الزاوية يساوي 72in، فأوجد طول الوتر. (مهارة سابقة)

استعمل القانون العام لحل كل معادلة تربيعية مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة: (مهارة سابقة)

9) $x^2 - 4x = 10$

10) $3x^2 - 2x - 4 = 0$

11) $x^2 = x + 15$

12) **فيزياء:** أطلق صاروخ رأسيًا إلى الأعلى من مستوى سطح الأرض. وتُعطى المسافة الرأسية d التي قطعها من سطح الأرض مقيسة بوحدة القدم بعد t من الثواني بالعلاقة $d = 96t - 16t^2$، أوجد قيم t عندما تكون $d = 102$ ft، إلى أقرب جزء من عشرة. (مهارة سابقة)

مراجعة سريعة

مثال (1)

حُلّ المعادلة: $5 - y = 13(y+2)$

$$5 - y = 13(y+2)$$

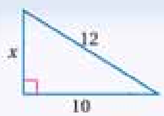
$5 - y = 13y + 26$ خاصية التوزيع

$-21 = 14y$ بجمع $(y-26)$ للطرفين وتجميع الحدود المتشابهة

$-1.5 = y$ بقسمة الطرفين على 14

مثال (2)

أوجد قيمة x مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة كلما لزم ذلك.



$a^2 + b^2 = c^2$ نظرية فيثاغورس

$x^2 + 10^2 = 12^2$ بالتعويض

$x^2 + 100 = 144$ بالتبسيط

$x^2 = 44$ بطرح 100 من كلا الطرفين

$x = \sqrt{44}$ أخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$x \approx 6.6$ استعمال الآلة الحاسبة

مثال (3)

حُلّ المعادلة $x^2 + 3x - 10 = 0$ باستعمال القانون العام:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ القانون العام

$= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)}$ $a = 1, b = 3, c = -10$

$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2}$ بالتبسيط

$= \frac{-3 \pm 7}{2}$ بالتبسيط

$x = \frac{-3+7}{2} = 2$ أو $x = \frac{-3-7}{2} = -5$

8-1 الدائرة ومحيطها
Circle and Circumference

الأفكار الرئيسة:

- أتعرف عناصر الدائرة وأستعملها.
- أحل مسائل باستعمال محيط الدائرة.

المفردات

الدائرة
circle

المركز
center

الوتر
chord

نصف القطر
radius

القطر
diameter

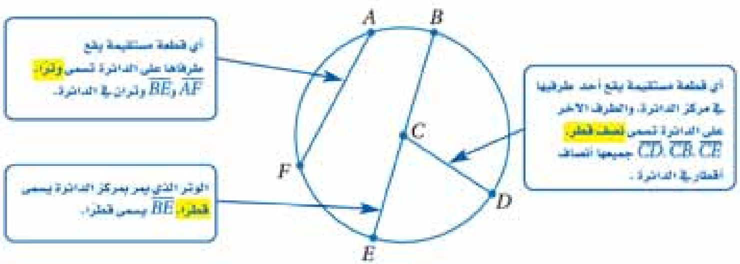
محيط الدائرة
circumference

النسبة التقريبية (π)
Pi

استعد

تلاحظ الأشكال الدائرية كثيرًا في مدن الألعاب وتبين الصورة المجاورة إحدى الألعاب، وهي على شكل قرص دائري ثُبِّت عليه مقاعد للزوار الذين يرغبون في استعمال هذه اللعبة.

عناصر الدائرة: **الدائرة** هي المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى، والتي تبعد مسافات متساوية عن نقطة معطاة تسمى **مركز الدائرة**. وعادة ما تسمى الدائرة بمركزها، والشكل أدناه يظهر الدائرة C التي يمكن كتابتها بصورة $\odot C$. وتوجد عدة قطع مستقيمة خاصة بالدائرة يبيّنها الشكل الموضح أدناه.



يدل نصف قطر الدائرة على قطعة مستقيمة، أو على قياس هذه القطعة المستقيمة. وكذلك بالنسبة لقطر الدائرة.

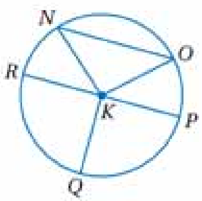
لاحظ أن القطر $\overline{BE}$ يتكون من نصفي القطر $\overline{CB}$ و $\overline{CE}$.

إرشادات

المحل الهندسي

يقصد بالمحل الهندسي مجموعة النقاط في المستوى أو الفراغ التي تحقق شرطًا معيّنًا

مثال 1 تحديد عناصر الدائرة



a) سمّ الدائرة.

تسمى الدائرة التي مركزها K، الدائرة K أو $\odot K$.

b) سمّ نصف قطر في الدائرة.

يظهر خمسة أنصاف أقطار في الدائرة K:
$\overline{KN}, \overline{KO}, \overline{KP}, \overline{KQ}, \overline{KR}$

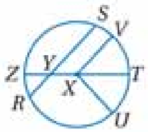
c) سمّ وترًا في الدائرة.

يظهر وتران هما: $\overline{NO}$ و $\overline{RP}$.

d) سمّ قطرًا في الدائرة.

$\overline{RP}$ هو الوتر الوحيد المار بالمركز، إذن $\overline{RP}$ هو قطر.

تحقق من فهمك



1) سمّ الدائرة، وسمّ وترًا وقطرًا ونصف قطر فيها.

إرشادات

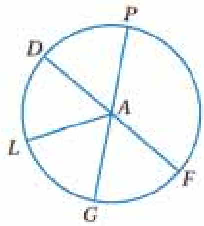
مركز الدائرة

سوف يظهر مركز الدائرة في الأشكال المرسومة في هذا الكتاب كنقطة.

استنادًا إلى التعريف الذي ينص على أن المسافة من المركز إلى أي نقطة على الدائرة تكون متساوية، فإن أنصاف أقطار الدائرة r متطابقة. وبما أن القطر d يتكون من نصفي قطرين في الدائرة، فإن كل الأقطار متطابقة. ويكون $d = 2r$، وأيضًا $r = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}d$.

مثال

إيجاد نصف قطر وقطر



2 $\overline{DF}$ و $\overline{PG}$ قطران في الدائرة A:

a) إذا كان $DF = 10$، فأوجد DA.

$r = \frac{1}{2}d$ قانون نصف القطر

$= \frac{1}{2}(10) = 5$ بالتعويض والتبسيط

b) إذا كان $AG = 12$ ، فأوجد LA.

بما أن أنصاف أقطار الدائرة كلها متطابقة، فإن $LA = AG$. إذن ، $LA = 12$.

تحقق من فهمك

2A) إذا كان $PA = 7$، فأوجد PG.

2B) إذا كان $PG = 15$، فأوجد DF.

القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي دائرتين متقاطعتين تحتوي على نصف قطر كل منهما إذا كانت أكبر من كلا نصفي القطرين.

مثال

إيجاد القياسات في الدوائر المتقاطعة

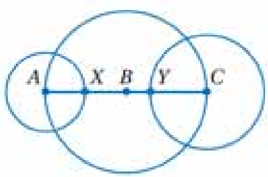
إرشادات

الدوائر المتطابقة

للدوائر في مثال 3 أنصاف أقطار مختلفة، لذلك هي ليست متطابقة.

وحتى تكون الدوائر متطابقة يجب أن يكون لها أطوال أنصاف الأقطار أو نفس الأقطار.

3 إذا كانت أطوال أقطار $\odot A, \odot B, \odot C$ تساوي **10 in, 20 in, 14 in** على الترتيب، فأوجد XB.



بما أن طول قطر $\odot A$ يساوي 10،إذن $AX = 5$.

وبما أن طول قطر $\odot B$ يساوي20 ،إذن $AB = BC = 10$.

ولكن $\overline{XB}$ هو جزء من نصف القطر $\overline{AB}$، ولدينا:

$AX + XB = AB$ مسلمة إضافة القطع المستقيمة

$5 + XB = 10$ بالتعويض

$XB = 5$ بطرح 5 من كلا الطرفين

تحقق من فهمك

3) أوجد BY.

محيط الدائرة **محيط الدائرة** هو طول الخط حول الدائرة، ويرمز إليه بالرمز C.

معمــل الهندسة

نسبة المحيط

يوجد علاقة خاصة بين محيط الدائرة وقطرها.

جمع البيانات وتحليلها

جمّع عشرة أشياء دائرية.

1) قِس المحيط C والقطر d لكلٍّ منها بوحدة الملمتر، وسجل النتائج في جدول.

2) احسب قيمة $\frac{C}{d}$ إلى أقرب جزء من مائة لكل منها، وسجل النتائج في العمود الرابع.

3) **خمّن** ما العلاقة بين المحيط والقطر في الدائرة؟

الشيء	C	d	$\frac{C}{d}$
1			
2			
3			
⋮			
10			

من خلال النشاط في معمل الهندسة يمكنك التوصل إلى أن محيط أي دائرة يمكن حسابه بإيجاد حاصل ضرب القطر في عدد أكبر قليلًا من 3. وبالتعريف، فإن النسبة $\frac{C}{d}$ تعطي عددًا غير نسبي، يُسمى **باي (pi)** ويرمز إليه بالرمز **π**، وهو مأخوذ من اللغة اليونانية. يمكن اشتقاق قانونين لمحيط الدائرة من هذا التعريف.

$$\frac{C}{d} = \pi \quad \text{تعريف } \pi$$

$$C = \pi d \quad \text{بضرب كلا الطرفين في } d$$

$$C = \pi(2r) \quad d = 2r$$

$$C = 2\pi r \quad \text{بالتبسيط}$$

مفهوم أساسي — **محيط الدائرة**

إذا كان طول محيط الدائرة C وحدة، وطول القطر d وحدة، أو كان نصف القطر r وحدة، فإن المحيط يُعبر عنه بالعلاقتين $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$.

ارشــادات

الأقطار وأنصاف الأقطار

يوجد عدد لا نهائي من الأقطار وأنصاف الأقطار في الدائرة.

مثــال إيجاد محيط الدائرة وقطرها ونصف قطرها.

4 **a)** أوجد C، إذا كان $r = 7$ cm.

$C = 2\pi r$ قانون المحيط

$= 2\pi(7)$ بالتعويض

$= 14\pi$

≈ 43.98 cm

b) أوجد C، إذا كان $d = 12.5$ in.

$C = \pi d$ قانون المحيط

$= \pi(12.5)$ بالتعويض

$= \pi(12.5)$

≈ 39.27 in

c) أوجد قيمة d و r إلى أقرب جزء من مائة، إذا كان $C = 136.9\ m$.

$C = \pi d$	قانون محيط الدائرة	$r = \frac{1}{2}d$	قانون نصف القطر
$136.9 = \pi d$	بالتعويض	$\approx \frac{1}{2}(43.58)$	$d \approx 43.58$
$\frac{136.9}{\pi} = d$	بقسمة كلا الطرفين على π	$\approx 21.79\ m$	باستعمال الآلة الحاسبة
$43.58\ m \approx d$	باستعمال الآلة الحاسبة		

تحقق من فهمك

4A) أوجد C، إذا كان $r = 12\ in$.

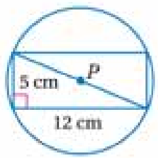
4B) أوجد C، إذا كان $d = 7.25\ m$.

4C) أوجد d و r إلى أقرب جزء من مائة، إذا كان $C = 77.8\ cm$.

يمكنك استعمال أشكال هندسية أخرى تساعدك على فهم محيط الدائرة وحسابه.

مثال استعمال أشكال أخرى لإيجاد محيط الدائرة

5 أوجد القيمة الفعلية لمحيط $\odot P$.



قطر الدائرة هو وتر المثلث القائم الزاوية.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$5^2 + 12^2 = c^2$	بالتعويض
$169 = c^2$	بالتبسيط
$13 = c$	بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

إذن، قطر الدائرة يساوي $13\ cm$، ولإيجاد محيط الدائرة، عوض عن قيمة d في القانون $C = \pi d$.

إذن القيمة الفعلية لمحيط الدائرة يساوي 13π.

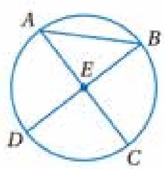
تحقق من فهمك

5) ارسم مربعًا طول ضلعه $8\ in$ داخل $\odot N$، وأوجد القيمة الفعلية لمحيط $\odot N$.

تأكد

المثالان 1 و 2 (ص 168-169)

ارجع إلى الدائرة في الشكل المجاور للإجابة عن التمارين 6 – 1.



1) سمّ الدائرة. **2)** سمّ نصف قطر.

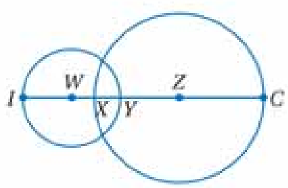
3) سمّ وترًا. **4)** سمّ قطرًا.

5) افترض أن $BD = 12\ mm$، فأوجد نصف قطر الدائرة.

6) افترض أن $CE = 5.2\ in$، وأوجد طول قطر الدائرة.

مثال 3 (ص 169)

إذا كان نصف قطر $\odot W$ هو 4 وحدات، ونصف قطر $\odot Z$ يساوي 7 وحدات، و $XY = 2$. فأوجد قياس كل مما يأتي:



7) YZ **8)** IX **9)** IC

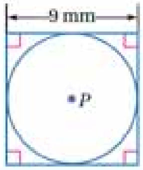
مثال 4
(ص 170)

في دائرة ما، إذا أعطيت نصف القطر أو القطر أو المحيط، فأوجد القياسات الأخرى في كل مما يأتي مقربة إلى أقرب جزء من مائة:

(10 $r = 5\ m, d = \underline{\ ?\ }, C = \underline{\ ?\ }$ **(11** $C = 2368\text{ ft}, d = \underline{\ ?\ }, r = \underline{\ ?\ }$

مثال 5
(ص 171)

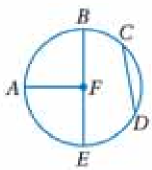
(12 في الشكل المجاور، أوجد القيمة الفعلية لمحيط الدائرة.



تمارين ومسائل

إرشادات للواجب المنزلي	
للتمارين	انظر الأمثلة
13–22	1
23–26	2
27–32	3
33–36	4
37, 38	5

ارجع إلى الدائرة في الشكل المجاور، لحل التمارين 17–13.



(13 سمّ الدائرة.

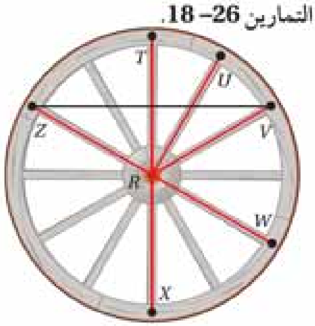
(14 سمّ أنصاف الأقطار.

(15 سمّ وترًا.

(16 سمّ القطر.

(17 سمّ نصف قطر ليس مرسومًا كجزء من قطر.

تاريخ: ارجع إلى نموذج عجلة العربة في الشكل المجاور، لحل التمارين 26– 18.



(18 سمّ الدائرة.

(19 سمّ نصف قطر في الدائرة.

(20 سمّ وترًا في الدائرة.

(21 سمّ قطرًا في الدائرة.

(22 سمّ نصف قطر ليس مرسومًا كجزء من قطر.

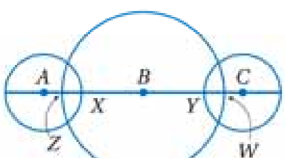
(23 إذا علمت أن نصف قطر الدائرة هو قدمان، فأوجد قطرها.

(24 إذا كان $RZ = 32$ in، فأوجد ZW.

(25 إذا كان $UR = 18$ in، فأوجد RV.

(26 إذا كان $XT = 1.2$ m، فأوجد UR.

أطوال أقطار $\odot A, \odot B, \odot C$ هي **10, 30, 10** وحدات على الترتيب. إذا علمت أن $\overline{AZ} \cong \overline{CW}$، وأن $CW = 2$. فأوجد كلًّا من القياسات الآتية:



(27 AZ **(28** ZX **(29** BX

(30 BY **(31** YW **(32** AC

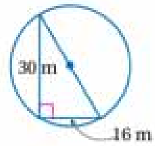
إذا أعطيت نصف القطر، أو القطر أو المحيط في دائرة ما، فأوجد قيمة القياسات المجهولة لكل مما يأتي مقربة إلى أقرب جزء من مائة:

(33 $r = 7\text{ mm}, d = \underline{\ ?\ }, C = \underline{\ ?\ }$ **(34** $d = 26.8\text{ cm}, r = \underline{\ ?\ }, C = \underline{\ ?\ }$

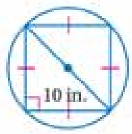
(35 $d = 2a, r = \underline{\ ?\ }, C = \underline{\ ?\ }$ **(36** $r = \frac{a}{6}, d = \underline{\ ?\ }, C = \underline{\ ?\ }$

أوجد القيمة الفعلية لمحيط كل دائرة مما يأتي:

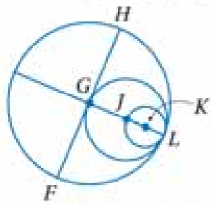
(37



(38



تتقاطع الدوائر G, J, K جميعًا في النقطة L كما هو في الشكل المجاور. فإذا كان $GH = 10$، فأوجد القياسات الآتية:



(39 FG

(40 FH

(41 GL

(42 GJ

(43 JL

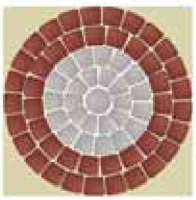
(44 JK

(45 **احتمال:** أوجد احتمال أن تكون القطعة المستقيمة التي تقع إحدى نهايتيها في مركز الدائرة، والنهاية الأخرى على الدائرة، نصف قطر لتلك الدائرة. وفسر إجابتك.

(46 **احتمال:** أوجد احتمال أن يكون الوتر، الذي لا يحوي مركز الدائرة، أطول الأوتار في الدائرة.

فناء: استعمل المعلومات الآتية لحل التمرينين 47 و 48.

يريد بسام تبليط فناء كالمبين في الصورة المجاورة.

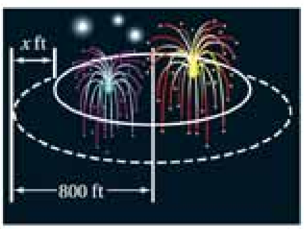


(47 إذا كان نصف قطر الفناء يساوي 6 m، فما محيطه؟

(48 إذا أراد أن يكون محيط الدائرة الداخلية 19 m، فما طول نصف قطر الدائرة إلى أقرب متر؟

ألعاب نارية: استعمل المعلومات الآتية في حل التمارين 51–49:

احتفالًا باليوم الوطني للمملكة العربية السعودية تطلق الألعاب النارية من منصة ثابتة، حيث يتم إبعاد المشاهدين مسافة كافية وآمنة عن دائرة الانفجار. علمًا بأن حدود الدائرة الآمنة تبعد عن مركز دائرة الانفجار 800 قدم.



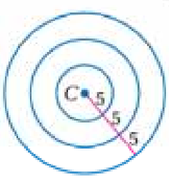
(49 أوجد القيمة التقريبية لمحيط الدائرة الآمنة.

(50 إذا كانت الدائرة الآمنة تبعد بمقدار يتراوح من 200 إلى 300 ft أكثر من بعد دائرة الانفجار عن المركز، فأوجد القيمتين اللتين يتراوح بينهما نصف قطر دائرة الانفجار.

(51 أوجد أقل قيمة وأكبر قيمة لمحيط دائرة الانفجار مقربة إلى أقرب قدم.

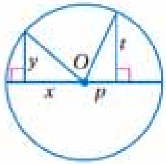
مسائل مهارات التفكير العليا

(52 **تبرير:** تسمى الدوائر التي لها المركز نفسه، وأنصاف أقطارها مختلفة **دوائر متحدة المركز**. استعمل الشكل المجاور لإيجاد محيط كل دائرة.

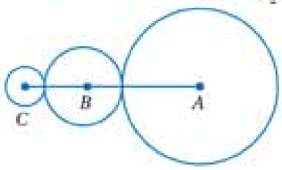


53) **مسألة مفتوحة :** ارسم دائرة بحيث يكون محيطها بين 8 cm و 12 cm. ما نصف قطرها؟ وضّح إجابتك .

54) **تحدٍّ :** في الشكل المجاور، النقطة O هي مركز الدائرة $x^2 + y^2 + p^2 + t^2 = 288$، ما القيمة الفعلية لمحيط $\odot O$؟



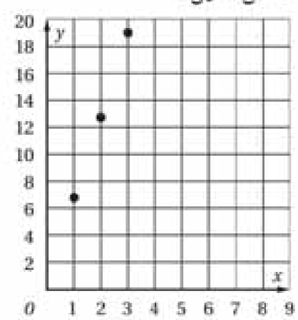
55) **تحدٍّ :** في الشكل المجاور، نصف قطر $\odot A$ يساوي مثلي (ضعف) نصف قطر $\odot B$ ويساوي أيضا أربعة أمثال نصف قطر $\odot C$.
فإذا كان مجموع محيطات الدوائر الثلاث 42π،
أوجد AC.



56) **اكتب :** ابحث في الإنترنت عن معلومات حول العلماء الذين درسوا الدائرة وصاغوا قوانينها، واكتب تقريرًا حول ذلك.

تدريب على اختبار معياري

57) **مراجعة :** أي العبارات فيما يأتي يمثلها الرسم أدناه أفضل تمثيل:



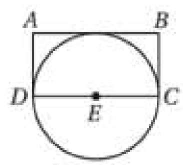
A العلاقة بين طولي ضلعي مربع.

B العلاقة بين طول ضلع المكعب ومساحته السطحية.

C العلاقة بين طول نصف قطر الدائرة ومحيطها.

D العلاقة بين طول نصف قطر الدائرة وقطرها.

58) إذا قارنا محيط $\odot E$ بمحيط المستطيل $ABCD$ في الشكل أدناه، فأي العبارات الآتية صحيح؟



F محيط المستطيل $ABCD$ أكبر من محيط الدائرة E.

G محيط الدائرة E أكبر من محيط المستطيل $ABCD$.

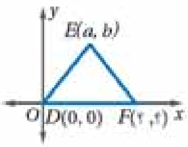
H محيط المستطيل $ABCD$ يساوي محيط الدائرة E.

J لا توجد معلومات كافية لتحديد أوجه المفاضلة.

مراجعة تراكمية

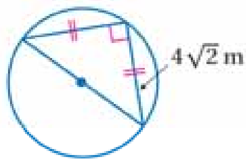
59) أوجد طول صورة القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ بعد تمدد معامله $K=\frac{-1}{2}$ حيث $A\ (5,-1),\ B\ (-3,5)$. (درس 7-5)

60) **الهندسة الإحداثية:** سمِّ الإحداثيات المجهولة، إذا كان $\triangle DEF$ مثلثًا متطابق الضلعين، زاوية رأسه E. (درس 3-3)

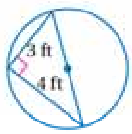


أوجد القيمة الفعلية لمحيط كل دائرة مما يأتي: (الدرس 8-1)

61)



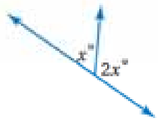
62)



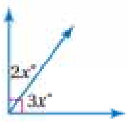
استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

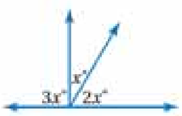
63)



64)

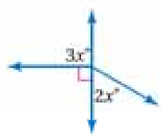


65)

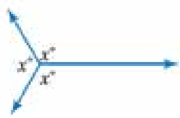


66)

67)



68)



اقرأ

تعبيرات في الحياة اليومية تحتوى مفردات من الرياضيات

هل سمعت عن أحدهم "يدور في دائرة مغلقة"؟ هل المعنى الرياضي لكلمة دائرة يعكس نفس المعنى الذي يرمي إليه هذا التعبير؟ وغالبًا ما يكون لهذه التعبيرات المستعملة في أحاديثنا اليومية علاقة بالمعنى الرياضي لهذه الكلمات التي يتضمنها التعبير.

التعبير	معناه في الحياة	معناه في الرياضيات
قوس شعر	أداة ستخدم لترتيب الشعر	القوس جزء متصل من دائرة محدد بنقطتين.
الدرجة الوظيفية	رتبة الموظف في مجال عمله	الدرجة هي وحدة قياس تستعمل لقياس الزوايا والأقواس.
الحمية المتكاملة	إضافات لتحقق متطلبات التغذية	الزاويتان المتكاملتان هما الزاويتان اللتان يكون مجموعهما 180°.

لاحظ أنه في الأمثلة السابقة، المعنى الرياضي للكلمات، له علاقة بالمعنى المستعمل في حياتنا اليومية.

اقرأ وتعلم

صف المعنى اللغوي لكل تعبير مما يأتي، وما علاقته بالمعنى الرياضي (في الرياضيات) للكلمات التي يحويها؟

1) يدور في دائرة مغلقة

2) الوصول إلى النقطة

3) لا يوجد برهان أو إثبات

4) **بحث** استعمل الإنترنت أو أي مصدر آخر لوصف المعنى المستعمل في الحياة اليومية (لغويًا) وعلاقته بالمعنى الرياضي لكل من التعبيرين:

a) المرسوم داخل.

b) المقطع.

5) **اكتب:** ما العلاقة بين التعريف الرياضي للقوس وتعريف القنطرة؟

8-2 قياس الزوايا والأقواس
Measuring Angles and Arcs

الأفكار الرئيسة:

- أميز القوس الأكبر، القوس الأصغر، نصف الدائرة، الزوايا المركزية، وقياساتها.
- أجد طول القوس.

المفردات:

الزاوية المركزية
central angle

القوس
arc

القوس الأصغر
minor arc

القوس الأكبر
major arc

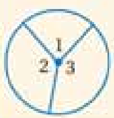
نصف الدائرة
semicircle

استعد

معظم الساعات في الأجهزة الإلكترونية عبارة عن ساعات رقمية، وهي الساعات التي تُظهر الوقت على شكل أرقام. و تستعمل الساعات العادية في تزيين المنزل، أو كساعات يدوية. وهذه الساعات لها عقارب أو مؤشرات متحركة تشير إلى الساعة والدقيقة، وأحيانًا هناك مؤشر أو عقرب للثواني. ووجه هذه الساعة عبارة عن دائرة. وتكوّن العقارب الثلاث زوايا مركزية فيها.

الزوايا والأقواس: لقد تعلمت في دراستك السابقة، أن مجموع الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوي $360°$، لذا فإن الدرجة تساوي $\frac{1}{360}$ من الدورة الكاملة حول نقطة.
وهذا يعني أن مجموع الزوايا حول مركز الساعة يساوي 360 درجة، وكل زاوية تتشكل من عقارب الساعة تسمى زاوية مركزية. و**الزاوية المركزية** يقع رأسها في مركز الدائرة وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة.

مفهوم أساسي — مجموع الزوايا المركزية

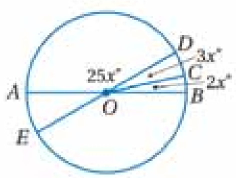


التعبير اللفظي: مجموع الزوايا المركزية في الدائرة، والتي لا تحوي نقاطًا داخلية مشتركة وتغطي قطاعاتها كل الدائرة، يساوي 360 درجة.

مثال: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360°$.

مثال — قياس الزوايا المركزية

1 **جبر:** ارجع إلى الدائرة $\odot O$.
وأوجد $m\angle AOD$.



$\angle AOD$ و $\angle DOB$ زاويتان متجاورتان على خط مستقيم، والزاويتان المتجاورتان على خط مستقيم متكاملتان.

$$m\angle AOD + m\angle DOB = 180°$$

$m\angle AOD + m\angle DOC + m\angle COB = 180°$ نظرية جمع الزوايا

$25x + 3x + 2x = 180$ بالتعويض

$30x = 180$ بالتبسيط

$x = 6$ بقسمة كلا الطرفين على 30

استعمل قيمة x لإيجاد $m\angle AOD$.

$m\angle AOD = 25x$ معطى

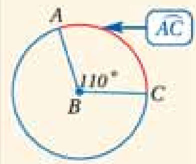
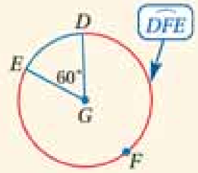
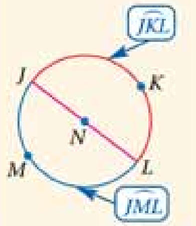
$= 25(6) = 150°$ بالتعويض

تحقق من فهمك

1) أوجد $m\angle AOE$.

تجزّئ الزاوية المركزية الدائرة إلى جزأين، و يسمى كل جزء **قوسًا**، ويرتبط قياس كل قوس بقياس زاويته المركزية.

مفاهيم أساسية — أقواس الدائرة

نوع القوس:	القوس الأصغر	القوس الأكبر	نصف الدائرة
تعريفه:	القوس الذي قياسه أقل من 180°	القوس الذي قياسه أكبر من 180°	القوس الذي قياسه 180°
مثال:			
تسميته:	يُسمى عادة بحرفي نهايتيه $\widehat{AC}$	يُسمى بحرفي نهايتيه ونقطة أخرى على القوس $\widehat{DFE}$	يُسمى بحرفي نهايتيه ونقطة أخرى على القوس $\widehat{JKL}$ و $\widehat{JML}$
قياس القوس بالدرجات يساوي:	قياس الزاوية المركزية $m\angle ABC = 110^\circ$, إذن $m\widehat{AC} = 110^\circ$	360° ناقص قياس القوس الأصغر الذي له نفس نهايتي الأطراف $m\widehat{DFE} = 360^\circ - m\widehat{DE}$ $m\widehat{DFE} = 360^\circ - 60^\circ$ $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$	$360^\circ \div 2 = 180^\circ$ $m\widehat{JML} = 180^\circ$ $m\widehat{JKL} = 180^\circ$

الأقواس المتساوية القياس في دائرة أو في دوائر متطابقة تكون متطابقة.

نظرية 8.1

في الدائرة أو في الدوائر المتطابقة، يكون القوسان متطابقين إذا وفقط إذا كانت الزاويتان المركزيتان المناظرتان لهما متطابقتين.

سوف تبرهن هذه النظرية في تمرين 50.

أقواس الدائرة التي تشترك في نقطة واحدة أو نقطتين فقط تكون أقواسًا متجاورة. وكما في الزوايا المتجاورة، فإنه يمكن جمع قياسات الأقواس المتجاورة.

مسلّمة 8.1 — مسلّمة جمع الأقواس

القوس المكوّن من قوسين متجاورين يكون قياسه حاصل جمع قياسيهما.

مثال: في $\odot S$

$m\widehat{PQ} + m\widehat{QR} = m\widehat{PQR}$.

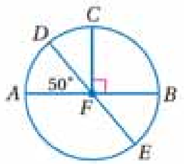
إرشادات

تسمية الأقواس

إذا كان قوس ما مسمى بثلاثة أحرف فلا تفترض أنه نصف دائرة أو قوس أكبر في دائرة. إذ يمكنك تسمية القوس الأصغر في دائرة بثلاثة أحرف.

مثال: قياسات الأقواس

2 في $\odot F$، $\overline{CF} \perp \overline{FB}$, $m\angle DFA = 50^\circ$. أوجد قياس كل مما يأتي:



a) $m\widehat{BE}$

$\widehat{BE}$ قوس أصغر، إذن $m\widehat{BE} = m\angle BFE$.

$\angle BFE \cong \angle DFA$	الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة
$m\angle BFE = m\angle DFA$	تعريف الزوايا المتطابقة
$m\widehat{BE} = m\angle DFA$	خاصية التعدي
$m\widehat{BE} = 50^\circ$	بالتعويض

b) $m\widehat{CBE}$

يتكون $\widehat{CBE}$ من القوسين المتجاورين. $\widehat{BE}$ و $\widehat{CB}$

$m\widehat{CB} = m\angle CFB$	
$= 90^\circ$	$\angle BFC$ زاوية قائمة
$m\widehat{CBE} = m\widehat{CB} + m\widehat{BE}$	مسلمة جمع الأقواس
$m\widehat{CBE} = 90^\circ + 50^\circ = 140^\circ$	بالتعويض

c) $m\widehat{ACE}$

من طرائق إيجاد $m\widehat{ACE}$ استعمال $\widehat{BE}$ و $\widehat{ACB}$، حيث $\widehat{ACB}$ نصف دائرة.

$m\widehat{ACE} = m\widehat{ACB} + m\widehat{BE}$	مسلمة جمع الأقواس
$m\widehat{ACE} = 180^\circ + 50^\circ = 230^\circ$	بالتعويض

تحقق من فهمك

أوجد قياس كل مما يأتي:

2A) $m\widehat{CD}$ **2B)** $m\widehat{DCB}$ **2C)** $m\widehat{CAE}$

في التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية، تقسم الزوايا المركزية الدائرة إلى أجزاء أو قطاعات لتمثيل بيانات معينة، تُعطى عادة كنسب مئوية، و يتناسب قياس الزاوية المركزية مع النسبة المئوية الممثلة لها.

مثال: التمثيل بالقطاعات الدائرية

3 **الخدمات الصحية:** يبين الشكل المجاور النسب المئوية للخدمات الصحية في إحدى الدول وفق أربع فئات، أوجد قياس الزاوية المركزية لكل فئة.

النسب المئوية للخدمات الصحية

مجموع النسب المئوية يساوي 100% وهذا يمثل الفئات الأربع جميعها. استعمل النسبة المئوية لتحديد الجزء من الدائرة الكاملة (360°) لكل زاوية مركزية.

المستشفيات الحكومية	$19.1\% \times 360^\circ = 68.76^\circ$
المستشفيات الخاصة	$23.4\% \times 360^\circ = 84.24^\circ$
المراكز الصحية الحكومية	$46.8\% \times 360^\circ = 168.48^\circ$
مستشفيات الولادة الحكومية	$10.7\% \times 360^\circ = 38.52^\circ$

تحقق من فهمك

رياضة: ارجع إلى الجدول المجاور، الذي يُظهر الألعاب الرياضية المفضلة لمجموعة من الطلبة، والنسبة المئوية للمشاركة في كل منها.

مشاركات في الرياضات	
كرة السلة	20%
الكرة الطائرة	18%
كرة الريشة	7%
كرة القدم	39%
التنس	9%
كرة اليد	7%

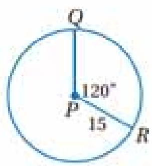
3A) إذا مثلت هذه المعلومات بالقطاعات الدائرية، فما قياس الزاوية المركزية لكل فئة؟

3B) هل توجد ألعاب رياضية لها قياس القوس نفسه؟ ولماذا؟
ما قياس الأقواس التي تمثل رياضة الكرة الطائرة وكرة القدم معًا ؟

طول القوس: هناك طريقة أخرى لقياس القوس، وهي إيجاد طوله. وبما أن قوس الدائرة جزء من الدائرة، إذن طول هذا القوس جزء من محيطها.

مثال 4 طول القوس

4 في الدائرة P، $PR = 15$، $m\angle QPR = 120°$. أوجد طول $\widehat{QR}$.



في $\odot P$، $r = 15$، إذن (طول المحيط) $C = 2\pi(15) = 30\pi$
و $m\widehat{QR} = m\angle QPR = 120°$.

اكتب تناسبًا لمقارنة كل جزء منسوبًا إلى الدائرة الكاملة.

طول القوس ← ، محيط الدائرة ←
$$\frac{120}{360} = \frac{\ell}{30\pi}$$
→ قياس القوس بالدرجات ، → قياس الدائرة كاملة بالدرجات

والآن حُلّ التناسب لتجد قيمة ℓ.

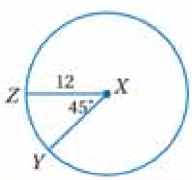
$$\frac{120}{360} = \frac{\ell}{30\pi}$$

$$\frac{120}{360}(30\pi) = \ell \quad \text{بضرب كلا الطرفين في } 30\pi$$

$$10\pi = \ell \quad \text{بالتبسيط}$$

طول القوس $\widehat{QR}$ هو 10π وحدة أو 31.42 وحدة تقريبًا.

تحقق من فهمك



4) أوجد طول $\widehat{ZY}$ في الشكل المجاور.

ويمكن تبني التناسب الذي استعمل في مثال 4 لإيجاد طول القوس في أي دائرة.

مفهوم أساسي — طول القوس

طول القوس ← ، محيط الدائرة ←
$$\frac{A}{360} = \frac{\ell}{2\pi r}$$
→ قياس القوس بالدرجات ، → قياس الدائرة كاملة بالدرجات

ويمكن كتابتها بصورة: $\frac{A}{360} \cdot C = \ell$

إرشادات

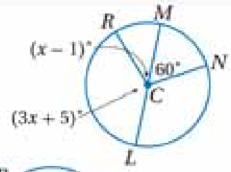
مراجعة

لمزيد من الفهم، ارجع إلى موضوع التناسب في دراستك السابقة.

تأكد

مثال 1 (ص 177)

جبر: أوجد قياس كل مما يأتي.

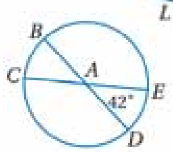


1) $m\angle NCL$ 2) $m\angle RCL$

3) $m\angle RCM$ 4) $m\angle RCN$

مثال 2 (ص 179)

في $\odot A$، $m\angle EAD = 42^\circ$. أوجد قياس كل مما يأتي:



5) $m\widehat{BC}$ 6) $m\widehat{CBE}$

7) $m\widehat{EDB}$ 8) $m\widehat{CD}$

مثال 3 (ص 179)

9) **مطاعم:** يبيّن التمثيل المجاور نتائج دراسة أجريت على مجموعة من الأشخاص الذين يتناولون وجبات الطعام في المطعم، لمعرفة أهم الأمور التي تهم الزبون. حدد قياس كل زاوية في التمثيل مقربًا إلى أقرب درجة.

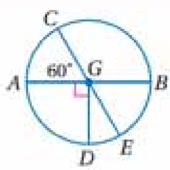
مثال 4 (ص 180)

10) تقع النقطتان T و R على $\odot W$ بحيث إن $WR = 12$ ، و $m\angle TWR = 60^\circ$. أوجد طول $\widehat{TR}$.

تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين	للواجب المنزلي انظر الأمثلة
11–20	1
21–28	2
29–31	3
32–35	4

أوجد قياس كل مما يأتي:

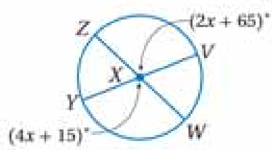


11) $m\angle CGB$ 12) $m\angle BGE$

13) $m\angle AGD$ 14) $m\angle DGE$

15) $m\angle CGD$ 16) $m\angle AGE$

جبر: أوجد قياس كل مما يأتي:

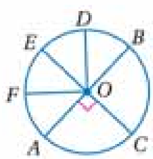


17) $m\angle ZXV$ 18) $m\angle YXW$

19) $m\angle ZXY$ 20) $m\angle VXW$

$\overline{EC}$ و $\overline{AB}$ قطران في $\odot O$ ، $\angle BOD \cong \angle DOE \cong \angle EOF \cong \angle FOA$.

أوجد قياس كل مما يأتي:



21) $m\widehat{BC}$ 22) $m\widehat{AC}$ 23) $m\widehat{AE}$

24) $m\widehat{EB}$ 25) $m\widehat{ACB}$ 26) $m\widehat{AD}$

27) $m\widehat{CBF}$ 28) $m\widehat{ADC}$

طعام: ارجع إلى الجدول المجاور واستعمل المعلومات الآتية لحل التمارين 29–31.

أجريت عملية مسح لأخذ رأي الناس في المدة الآمنة التي يبقى الطعام فيها صالحًا للأكل في حالة وقوعه على الأرض. وكانت النتائج كما هو وارد في الجدول المجاور.

هل تأكل الطعام الذي يقع على الأرض؟	
غير آمن للأكل	78%
إذا لم يتجاوز ثلاث ثوان	10%
إذا لم يتجاوز خمس ثوان	8%
إذا لم يتجاوز عشر ثوان	4%

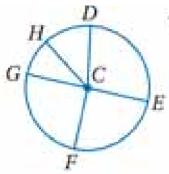
29) إذا أردت تمثيل هذه البيانات باستعمال القطاعات الدائرية، فأوجد قياس الزاوية المركزية لكل فئة.

30) صف نوع القوس الممثل لكل فئة.

31) مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.

الربط مع الحياة

يستعمل المزارعون في السهول الشاسعة أنظمة ري تدور على محور مركزي لري المزروعات. وهذا النظام ذو الطاقة المنخفضة يعمل على رش الماء على شكل دوائر تروي المناطق إلى مدى بعيد بقطر يصل إلى آلاف الأقدام بأقل كمية من الماء المفقود، وبأقل نسبة تبخر من رش الماء.



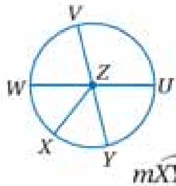
طول قطر $\odot C$ يساوي 32 وحدة. أوجد طول القوس المقابل للزاوية المركزية المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

32) $\widehat{DE}$ إذا كان $m\angle DCE = 100°$

33) $\widehat{DHE}$ إذا كان $m\angle DCE = 90°$

34) $\widehat{HDF}$ إذا كان $m\angle HCF = 125°$

35) $\widehat{HD}$ إذا كان $m\angle DCH = 45°$



جبر: في $\odot Z$, $m\angle VZU = 4x$, $\angle WZX \cong \angle XZY$, $m\angle UZY = 2x + 24$، $\overline{VY}$ ، $\overline{WU}$ قطران فيها. أوجد قياس كل مما يأتي:

36) $m\widehat{UY}$	37) $m\widehat{WV}$	38) $m\widehat{WX}$	39) $m\widehat{XY}$
40) $m\widehat{WUY}$	41) $m\widehat{YVW}$	42) $m\widehat{XVY}$	43) $m\widehat{WUX}$

حدد ما إذا كانت العبارات التالية **صحيحة أحيانًا**، أو **صحيحة دائمًا**، أو **غير صحيحة أبدًا**:

44) قياس القوس الأكبر يكون أكبر من $180°$.

45) الزاوية المركزية للقوس الأصغر حادة.

46) يعتمد مجموع قياس الزوايا المركزية في الدائرة على قياس نصف قطرها.

47) أنصاف الدوائر في الدوائر المتطابقة تكون متطابقة.

48) **ساعة الحائط:** تكوّن عقارب الساعة زوايا متطابقة في أوقات مختلفة من اليوم، فعلى سبيل المثال، الزاوية المتكونة عند الساعة 2:00 تطابق الزاوية المتكونة عند الساعة 10:00. إذا كان لساعة ما قطر يساوي قدمًا واحدة، فما طول القوس بين عقرب الدقائق وعقرب الساعات عند الساعة 2:00؟

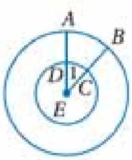
49) **ريّ:** تقوم بعض أنظمة الرّيّ برش الماء على هيئة دوائر. وتستطيع التحكم في فتحة خرطوم الرش في اتجاه معين. ويبين الرسم المجاور خرطومًا لرش الماء تم ضبطه بحيث لا يصل الماء إلى المنزل. إذا كان نصف قطر منطقة الرش يساوي 12 قدمًا، فأوجد الطول التقريبي للقوس المتكون من عملية الرش.

50) **برهان:** اكتب برهانًا للنظرية 8.1.

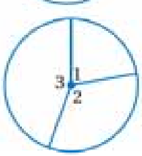
مسائل مهارات التفكير العليا

51) **تبرير:** قارن بين الدوائر المتحدة المركز والدوائر المتطابقة، موضحًا الاختلاف بينهما.

52) **مسألة مفتوحة:** ارسم دائرة وعيّن عليها ثلاث نقاط، وسمّ جميع الأقواس التي تحددها هذه النقاط، واستعمل المنقلة لإيجاد قياسات هذه الأقواس.



53) **تحدٍّ:** الدوائر المرسومة في الشكل المجاور هي دوائر متحدة المركز، ومركزها E. إذا كانت $m\angle 1 = 42°$، فحدد ما إذا كان $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$. وفسر إجابتك.

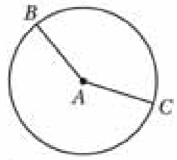


54) **تحدٍّ:** النسبة بين قياسات الزوايا المركزية 1 ، 2 ، 3 هي 2:3:4 على الترتيب. أوجد قياس كل زاوية.

55) **اكتب:** استعمل المعلومات المتعلقة بساعات الحائط مما جاء في صفحة 177، لتحديد نوع الزوايا المتكونة من عقارب الساعة، مضمنًا ذلك أنواع الزوايا المتكونة في أوقات مختلفة من اليوم نفسه، وتحديد متى تكون الزوايا متطابقة.

تدريب على اختبار معياري

56) في الشكل أدناه، $\overline{AB}$ نصف قطر الدائرة A و $\widehat{BC}$ القوس الأصغر.

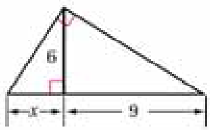


إذا كان $AB = 5$ in وطول $\widehat{BC}$ يساوي 4π in، ماقياس $\angle BAC$.

A $150°$ **C** $120°$

B $144°$ **D** $72°$

57) **مراجعة:** ما قيمة x في الشكل أدناه؟



F 2

G 3

H 4

J 6

مراجعة تراكمية

إذا أُعطيت نصف قطر أو قطرًا أو محيط الدائرة، فأوجد القياس المجهول إلى أقرب جزء من مائة: (الدرس 8-1)

58) $r = 10, d = \underline{?}, C = \underline{?}$

59) $d = 13, r = \underline{?}, C = \underline{?}$

60) $C = 28\pi, d = \underline{?}, r = \underline{?}$

61) $C = 75.4, d = \underline{?}, r = \underline{?}$

62) مانوع التحويل الهندسي الذي ينقل المثلث $A(-2,3), B(-1,1), C(-3,1)$ إلى المثلث $A'(2,3), B'(1,1), C'(3,1)$؟ (الدرس 7-1)

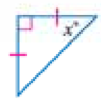
استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

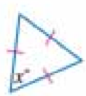
63) 

64) 

65) 

66) 

67) 

68) 

8-3 الأقواس والأوتار
Arcs and Chords

استعد

تحوي محمصة الكعك الدائرية الشكل نقوشًا تشكل أوتارًا في الدائرة في كلتا الجهتين، وتعطي نمطًا منتظمًا لقطع الكعك عند خبزه.

الأقواس والأوتار: إن نقطتي نهاية وتر هما أيضًا نهايتا قوس، إذا رسمت نمط الكعك على ورقة وطويتها على القطر الأفقي، فإن $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ تنطبقان تمامًا، وكذلك القوسان $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$. وهذا يقترح النظرية التالية.

نظرية 8.2

تتطابق الأقواس الصغرى في الدائرة أو الدوائر المتطابقة إذا وفقط إذا تطابقت الأوتار المناظرة لها.

اختصار:

في ⊙، القوسان الصغيران ≅ إذن وتراهما ≅.

في ⊙، الوتران ≅ إذن قوساهما الصغيران ≅.

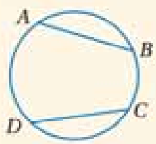
أمثلة:

إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

فإن $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

إذا كان $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

فإن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$



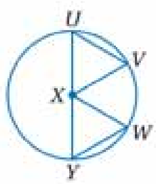
سوف تبرهن الجزء الثاني من نظرية 8.2 في التمرين 1.

مثال: برهن نظرية 8.2

1 نظرية 8.2 (الجزء 1)

المعطيات: $\odot X$, $\widehat{VU} \cong \widehat{WY}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{UV} \cong \overline{YW}$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\odot X, \widehat{UV} \cong \widehat{YW}$	1) معطى
2) $\angle UXV \cong \angle WXY$	2) إذا كانت الأقواس ≅، فإن الزوايا المركزية المناظرة ≅
3) $\overline{UX} \cong \overline{XV} \cong \overline{WX} \cong \overline{XY}$	3) جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة
4) $\triangle UXV \cong \triangle WXY$	4) SAS
5) $\overline{UV} \cong \overline{YW}$	5) من تطابق مثلثين

إرشادات

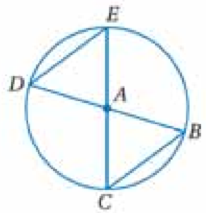
البرهان ذو العمودين

البرهان المستعمل في مثال 1 يسمى برهانًا ذا عمودين.

تحقق من فهمك

1) المعطيات: $\odot A,\ \widehat{BC} \cong \widehat{DE}$

المطلوب إثبات أن: $\overline{BC} \cong \overline{DE}$

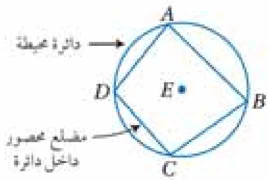


إرشادات

الدائرة المحيطة

الدائرة المحيطة بالمضلع هي الدائرة التي تمر برؤوسه.

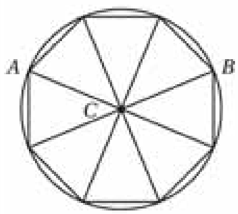
الأوتار الناشئة عن الأقواس المتجاورة يمكن أن تكوّن مضلعًا. الشكل الرباعي $ABCD$ هو **مضلع محصور داخل دائرة**؛ لأن رؤوسه تقع على الدائرة. والدائرة E هي **دائرة محيطة** بالمضلع لأنها تحوي جميع رؤوسه.



مثال على اختبار معياري

2 قطعة فنية من الزجاج الملون مصممة على شكل ثماني منتظم محصور داخل الدائرة C، كما في الشكل المجاور، ما قياس $\angle ACB$؟

A $108°$	**C** $135°$
B $120°$	**D** $150°$



جميع الزوايا المركزية في المضلع المنتظم متطابقة. قياس كل زاوية في الشكل الثماني المنتظم تساوي $360° \div 8 = 45°$. والزاوية ACB تتألف من ثلاث زوايا مركزية، لذلك يكون قياسها $3\ (45°) = 135°$ فالإجابة الصحيحة هي C.

تحقق من فهمك

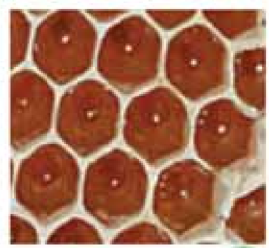
2) تحيط دائرة بسداسي منتظم. ما قياس القوس بين كل رأسين متتاليين؟

F $60°$

G $72°$

H $36°$

J $30°$



الربط مع الحياة

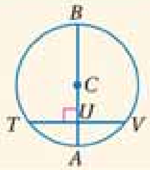
تأمل في قدرة الله عز وجل حيث يستطيع النحل بناء خلايا على شكل سداسي منتظم، ويستعملها لتخزين الشمع والعسل.

الأقطار والأوتار: الأقطار العمودية على الأوتار تُنتج علاقات بين القطع المستقيمة الخاصة والأقواس. افترض أنك رسمت دائرة C، ورسمت فيها الوتر $\overline{WX}$ وقمت بطي الورقة لإنشاء العمود المنصّف للوتر، فستجد أن العمود المنصّف يقسم $\widehat{WX}$ إلى قسمين متساويين، ويمر بمركز الدائرة ويحوي قطرًا فيها.

نظرية 8.3

في الدائرة، إذا كان قطر (أو نصف قطر) الدائرة عموديًّا على وتر فيها، فإنه ينصّف الوتر وينصّف قوسه أيضًا.

مثال: إذا كان $\overline{TV} \perp \overline{BA}$، فإن $\widehat{AT} \cong \widehat{AV}$ ، $\overline{UT} \cong \overline{UV}$.

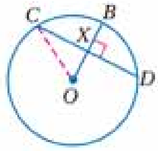


سوف تبرهن هذه النظرية 8.3 في تمرين 8.

مثال

نصف القطر العمودي على الوتر

3 نصف قطر الدائرة O يساوي 13 cm. ونصف القطر $\overline{OB}$ يعامد الوتر $\overline{CD}$ الذي طوله يساوي 24 cm.



a) إذا كان $m\widehat{CD} = 134°$ فأوجد $m\widehat{CB}$.

$\overline{OB}$ تنصف $\widehat{CD}$، إذن $m\widehat{CB} = \frac{1}{2} m\widehat{CD}$.

$m\widehat{CB} = \frac{1}{2} m\widehat{CD}$ تعريف منصّف القوس

$= \frac{1}{2}(134°) = 67°$ $m\widehat{CD} = 134°$

b) أوجد OX.

ارسم نصف القطر $\overline{OC}$. $\triangle CXO$ قائم الزاوية.

$CO = 13$ $r = 13$

$\overline{OB}$ تنصف $\overline{CD}$ نصف القطر العمودي على الوتر ينصّف الوتر.

$CX = \frac{1}{2}(CD)$ تعريف القطعة المنصّفة

$= \frac{1}{2}(24)$ $CD = 24$

$= 12$

استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد OX.

$(CX)^2 + (OX)^2 = (CO)^2$ نظرية فيثاغورس

$12^2 + (OX)^2 = 13^2$ $CX = 12, CO = 13$

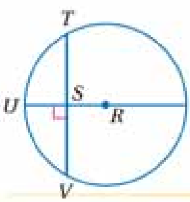
$144 + (OX)^2 = 169$ بالتبسيط

$(OX)^2 = 25$ بطرح 144 من كلا الطرفين

$OX = 5$ بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

تحقق من فهمك

نصف قطر الدائرة R يساوي **16 cm**. ونصف القطر $\overline{RU}$ يعامد الوتر $\overline{TV}$ الذي طوله **22 cm**.



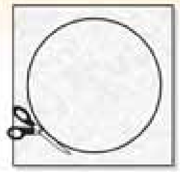
3A) إذا كان $m\widehat{TV} = 110°$، فأوجد $m\widehat{UV}$. **3B)** أوجد RS.

معمـــل الهندسة

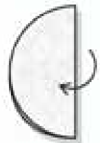
الأوتار المتطابقة والمسافة

نموذج

الخطوة 1: استعمل الفرجار لرسم دائرة كبيرة على ورقة، ثم قص الدائرة.

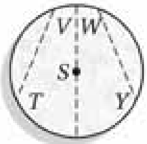


الخطوة 2: اطو الدائرة قطريًّا

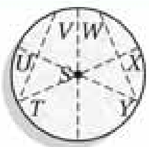


الخطوة 3: اطو الدائرة دون أن تفتحها، على ألا تتقاطع مع الطية الأولى، انظر الشكل.

الخطوة 4: ابسط الطية، وسمِّ العناصر كما هو مبيّن في الشكل.



الخطوة 5: اطو الدائرة، بحيث تنطبق النقطة V على T لتنصّف الوتر. افتح الدائرة، ثم اطوها مرة أخرى لتنصّف $\overline{WY}$. وسمِّ نقطتي التقاطع U و X كما هو مبين في الشكل المجاور.



حلّل النتائج:

1) ما العلاقة بين $\overline{SU}$ و $\overline{VT}$ ؟ $\overline{SX}$ و $\overline{WY}$ ؟

2) استعمل المسطرة المدرّجة بالسنتمترات لإيجاد أطوال: $\overline{SU}, \overline{WY}, \overline{VT}, \overline{SX}$. ماذا تلاحظ؟

3) **تخمين:** ما العلاقة بين بُعدي وترين متطابقين عن مركز الدائرة؟

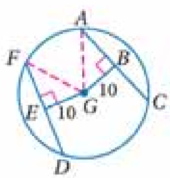
نظرية 8.4

في الدائرة أو الدوائر المتطابقة، يكون الوتران متطابقين إذا وفقط إذا كان لهما البُعد نفسه عن مركز الدائرة.

سوف تبرهن نظرية 8.4 في التمرينين 29–28

مثــال

أوتار متساوية البُعد عن المركز



4 الوتران $\overline{AC}$ و $\overline{DF}$ لهما البُعد نفسه عن المركز.

إذا كان نصف قطر $\odot G$ يساوي 26، فأوجد AC و DE.

$\overline{AC}$ و $\overline{DF}$ لهما البُعد نفسه عن G، إذن $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

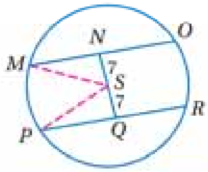
ارسم $\overline{AG}$ و $\overline{GF}$ لتكوّن مثلثين قائمي الزاوية.

$(AB)^2 + (BG)^2 = (AG)^2$	نظرية فيثاغورس
$(AB)^2 + 10^2 = 26^2$	$BG = 10, AG = 26$
$(AB)^2 + 100 = 676$	بالتبسيط
$(AB)^2 = 576$	بطرح 100 من كلا الطرفين
$AB = 24$	بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$AB = \frac{1}{2}(AC)$، إذن $AC = 2(24) = 48$.

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$، إذن DF يساوي 48 و $DE = \frac{1}{2}DF$ فيكون $DE = \frac{1}{2}(48) = 24$.

تحقق من فهمك



4) الوتران $\overline{MO}$ و $\overline{PR}$ لهما البُعد نفسه عن المركز.
إذا كان نصف قطر $\odot S$ يساوي 15 ، فأوجد MO و PQ.

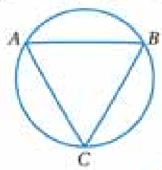
تأكد

مثال 1 (ص 184)

1) **برهان:** (الجزء 2 من نظرية 8.2)، المعطيات $\odot X$ و $\overline{YW} \cong \overline{UV}$، برهن أن $\widehat{UV} \cong \widehat{YW}$.
(استعمل الشكل في الجزء الأول من نظرية 8.2)

مثال 2 (ص 185)

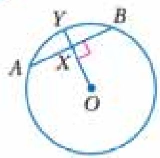
2) **تدريب على اختبار معياري:** ABC مثلث متطابق الأضلاع محصور داخل دائرة كما في الشكل المجاور، ما قياس $\widehat{ABC}$ ؟



A 60°	**C** 180°
B 120°	**D** 240°

مثال 3 (ص 186)

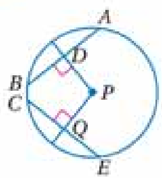
نصف قطر الدائرة O يساوي $10cm$، و $AB = 10cm$ ، و $m\widehat{AB} = 60^\circ$. أوجد كلًّا مما يأتي:



3) $m\widehat{AY}$ 4) AX 5) OX

مثال 4 (ص 187)

في $\odot P$، $PQ = 10$, $PD = 10$، و $QE = 20$.
أوجد طول القطعتين الآتيتين:

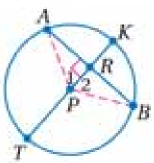


6) $\overline{AB}$ 7) $\overline{PA}$

تمارين ومسائل

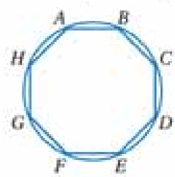
إرشادات للواجب المنزلي	
للتمارين	انظر الأمثلة
8	1
9–11	2
12–19	3
20–25	4

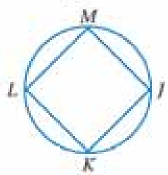
8) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لبرهنة نظرية 8.3.
المعطيات: $\odot P$، $\overline{AB} \perp \overline{TK}$
المطلوب: إثبات أن $\widehat{AK} \cong \widehat{BK}$ ، $\overline{AR} \cong \overline{BR}$

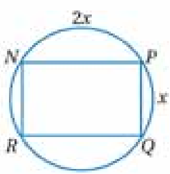


حدد قياس كل قوس في الدائرة المحيطة بكل شكل فيما يأتي:

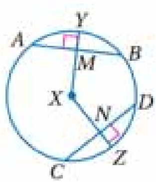
9) الثماني المنتظم 10) المربع 11) المستطيل





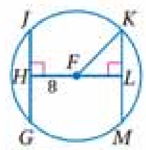


في $\odot X$، $AB = 30$, $CD = 30$, $m\widehat{CZ} = 40^\circ$. أوجد كلًّا مما يأتي:



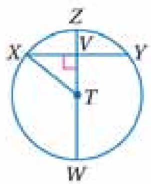
12) AM 13) MB
14) CN 15) ND
16) $m\widehat{DZ}$ 17) $m\widehat{CD}$
18) $m\widehat{AB}$ 19) $m\widehat{YB}$

في $\odot F$، $\overline{FH} \cong \overline{FL}$، $FK = 17$. أوجد كلًّا مما يأتي:



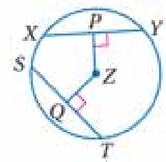
20) LK
21) KM
22) JG
23) JH

في $\odot T$، $ZV = 1$، $TW = 13$، أوجد كلًّ مما يأتي:

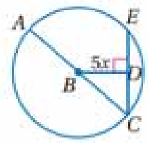


24) XV
25) XY

26) **جبر:** في $\odot Z$، $PZ = ZQ$،
$XY = 4a - 5$
$ST = -5a + 13$
أوجد SQ.



27) **جبر:** في $\odot B$، طول القطر يساوي 20 وحدة،
$m\angle ACE = 45^\circ$
أوجد قيمة x

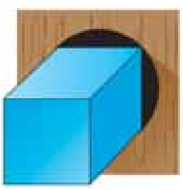


برهان: اكتب برهانًا لكل جزء من نظرية **8.4** .

28) إذا كان بُعدا وترين عن مركز الدائرة متساويين فإن الوترين متطابقان.

29) إذا كان الوتران في الدائرة متطابقين، فإن بُعديهما عن المركز متساويان.

30) إذا كان طول قطر الفتحة الدائرية في الشكل المجاور 4 in ، فما القيمة التقريبية لطول ضلع أكبر قاعدة مربعة للعمود الممكن إدخاله في هذه الفتحة الدائرية؟



ارسم الشكل وسمّه، ثم حُلّ التمارين **31–33**.

31) طول نصف قطر دائرة يساوي 34 m، وطول أحد أوتارها يساوي 60 m. ما بُعد الوتر عن مركز الدائرة؟

32) قطر الدائرة يساوي 60in، وطول أحد أوتارها يساوي 48in. كم يبعُد الوتر عن مركز الدائرة؟

33) طول وتر في دائرة يساوي 48 cm، ويبعد عن المركز مسافة 10 cm، أوجد نصف قطر الدائرة.

إرشادات

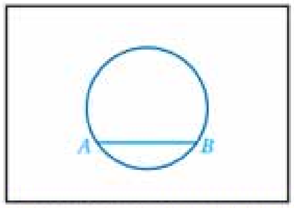
إيجاد مركز الدائرة

الطريقة التي استعملها يحيى لتحديد مركز الدائرة يمكن تنفيذها عن طريق الإنشاء الهندسي.

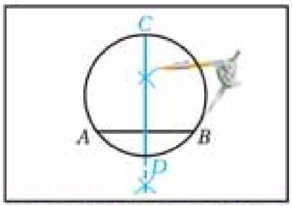
34) نجارة: يريد يحيى عمل ثقب في مركز طاولة دائرية، لتثبيت عمود مظلة، ولتحديد مركز الدائرة، قام برسم وترين في الدائرة، واستعمل المسطرة لتحديد نقطة المنتصف لكل منهما. ثم استعمل مربع النجار لرسم عمود على كل وتر عند نقطة المنتصف.
وضّح، كيف تحدد هذه الطريقة مركز سطح الطاولة الدائري.

إنشاء: اعتبر الإنشاءات الآتية للتمارين 37–35.

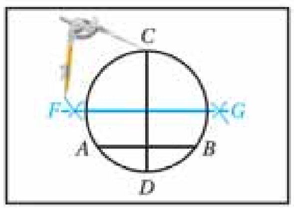
خطوة 1: ارسم دئرة باستعمال أي أداة دائرية، ثم ارسم الوتر $\overline{AB}$.



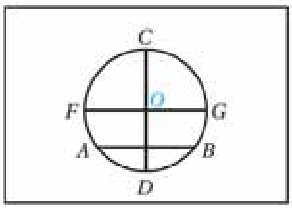
خطوة 2: ارسم العمود المنصّف للوتر $\overline{AB}$ وسمّه $\overline{CD}$.



خطوة 3: ارسم العمود المنصّف للوتر $\overline{CD}$ وسمّه $\overline{FG}$.



خطوة 4: سمّ نقطة تقاطع العمودين المنصفين بـ O.



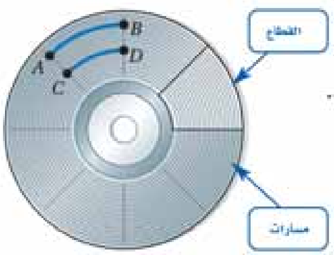
35) كرر الإنشاء السابق باستعمال أدوات دائرية مختلفة.

36) استعمل البرهان غير المباشر لإثبات أن $\overline{CD}$ يمر بمركز الدائرة، مفترضًا أن مركز الدائرة لا يقع على $\overline{CD}$.

37) برهن على أن O هي مركز الدائرة.

حاسوب: استعمل المعلومات الآتية لحل التمرينين 38، 39.

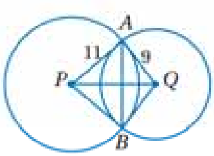
يحوي قرص الحاسوب الصلب أسطوانات مقسّمة إلى مسارات تعرف على أنها مجموعة دوائر متحدة المركز، وقطاعات محددة بأنصاف أقطار هذه الدوائر.



38) في الرسم المجاور، ما العلاقة بين $m\widehat{AB}$ و $m\widehat{CD}$ ؟

39) هل $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ متطابقان؟ وضّح إجابتك.

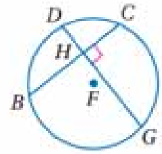
40) الوتر المشترك $\overline{AB}$ بين $\odot P$ و $\odot Q$ عمودي على القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي الدائرتين. إذا كان $AB = 10$، فما طول $\overline{PQ}$؟ وضح اجابتك.



مسائل مهارات التفكير العليا

41) مسألة مفتوحة: أنشئ دائرة، وارسم بداخلها أي مضلع على أن تحيط به الدائرة. وارسم أنصاف الأقطار، واستعمل المنقلة لتحديد ما إذا كانت أضلاع المضلع متطابقة. وصف حالة يكون فيها تطابق الأضلاع مهمًّا.

42) اكتشف الخطأ: كتبت سعاد وسلمى استنتاجًا عن الأوتار في $\odot F$. أيهما كان استنتاجها صحيحًا؟ فسّر ذلك.



سعاد

لأن $\overline{DG} \perp \overline{BC}$،
$\angle DHB \cong \angle DHC \cong \angle CHG \cong \angle BHG$،
و $\overline{DG}$ تنصف $\overline{BC}$

سلمى

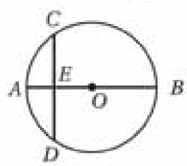
$\overline{BC} \perp \overline{DG}$، لكن $\overline{DG}$ لا ينصف $\overline{BC}$
لأنه ليس قطرًا.

43) تحدٍّ: نهايتا قطر في $\odot P$ هما A و B. نصف القطر $\overline{PQ}$ عمودي على $\overline{AB}$. الوتر $\overline{DE}$ ينصّف $\overline{PQ}$ ويوازي $\overline{AB}$، هل $DE = \frac{1}{2}(AB)$؟ فسّر إجابتك.

44) اكتب: اكتب تقريرًا موجزًا تبين فيه لماذا يختار النحل الخلايا التي يصنعها على شكل سداسي منتظم، وليست على أي شكل آخر (المربع مثلًا).

تدريب على اختبار معياري

45) $\overline{AB}$ قطر في الدائرة O وعمودي على الوتر $\overline{CD}$ ويقطعه في النقطة E.
إذا كان $AE = 2$, $OB = 10$
فما طول $\overline{CD}$؟



A 4 **C** 8
B 6 **D** 12

46) مراجعة: دائرة قطرها 12.5 ft، ما محيطها مقربًا إلى أقرب جزء من مائة.

F $19.63\,ft$ **H** $78.54\,ft$
G $39.27\,ft$ **J** $9.82\,ft$

مراجعة تراكمية

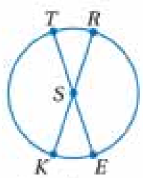
في $\odot S$، $m\angle TSR = 42°$. أوجد القياسات الآتية: (الدرس 8-2)

47) $m\widehat{KT}$ **48)** $\widehat{ERT}$ **49)** $\widehat{KRT}$

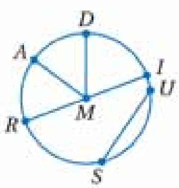
استعمل المعلومات في $\odot M$. (الدرس 8-1)

50) سمّ وترًا لا يكون قطرًا.

51) إذا كان $MD = 7$، فأوجد RI.



التمارين 47–49



التمرينان 50–51

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: حل كل معادلة مما يأتي: (مهارة سابقة)

52) $3x = \frac{1}{2}(120 - 60)$ **53)** $\frac{1}{2}(4x + 30) = 45$ **54)** $\frac{1}{2}x = 120$

8-4 الزوايا المحيطية
Inscribed Angles

استعد

مفتاح الصواميل هو أداة تُصنع بأقطار مختلفة، ويُستعمل لتثبيت الصواميل أو فكها. والفجوة في هذه الأداة تأخذ شكلاً سداسيًّا داخل أسطوانة معدنية.

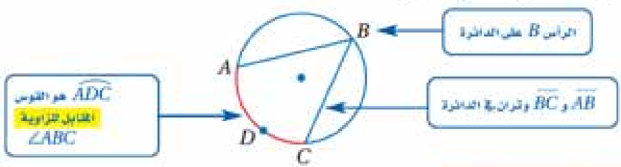
الأفكار الرئيسة:

- أجد قياس الزوايا المحيطية.
- أجد قياس زوايا المضلع المحصور داخل الدائرة.

المفردات:

المقابل
intercepted

الزوايا المحيطية: في درس 3–8، تعلمت أن المضلع الذي تقع رؤوسه على دائرة يسمى مضلعًا محصورًا داخل دائرة. وبطريقة مماثلة فالزاوية المحيطية هي الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة.

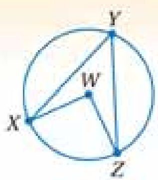


معمل الهندسة

قياس الزوايا المحيطية

نموذج

- استعمل الفرجار لرسم $\odot W$.
- ارسم زاوية محيطية وسمّها XYZ.
- ارسم $\overline{WX}$ و $\overline{WZ}$.



حلّل النتائج

1) قس $\angle XYZ$ و $\angle XWZ$.

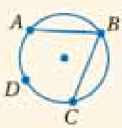
2) أوجد $m\widehat{XZ}$ و $m\angle XYZ$، وقارن بينهما.

3) **خمّن:** ما العلاقة بين قياس الزاوية المحيطية وقياس القوس المقابل لها؟

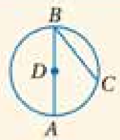
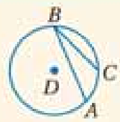
نظرية 8.5 نظرية الزاوية المحيطية

إذا رسمت زاوية محيطية فإن قياس هذه الزاوية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.
(أو قياس القوس المقابل للزاوية المحيطية يساوي ضعف قياس الزاوية).

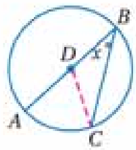
مثال: $m\angle ABC = \frac{1}{2}(m\widehat{ADC})$
أو $2(m\angle ABC) = m\widehat{ADC}$



لبرهنة نظرية 8.5، يجب مراعاة ثلاث حالات.

	حالة 1	حالة 2	حالة 3
شكل الزاوية المحيطية في $\odot D$			
موقع مركز الدائرة	على أحد ضلعي الزاوية	داخل الزاوية	خارج الزاوية

مثال نظرية 8.5 (حالة 1)



المعطيات: $\angle ABC$ مرسومة داخل $\odot D$، و $\overline{AB}$ قطر فيها.

المطلوب: إثبات أن $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$

ارسم $\overline{DC}$ وافترض أن $m\angle B = x^\circ$.

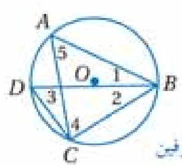
البرهان:

بما أن $\overline{DB}$ و $\overline{DC}$ نصفا قطرين متطابقان، إذن $\triangle BDC$ متطابق الضلعين، وأيضًا $\angle B \cong \angle C$.
لذلك $m\angle B = m\angle C = x^\circ$. وبتطبيق نظرية الزاوية الخارجية،
$m\angle ADC = m\angle B + m\angle C = 2x^\circ$. وبناءً على تعريف قياس القوس
ينتج أن $m\widehat{AC} = m\angle ADC = 2x^\circ$، وبمقارنة $m\widehat{AC}$ و $m\angle ABC$
نجد أن $m\widehat{AC} = 2(m\angle ABC)$
أو $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$.

وسوف تبرهن الحالتين 2 و 3 من نظرية 8.5 في التمرينين 31 و 32 على الترتيب.

مثال قياسات الزوايا المحيطية

1 في $\odot O$، $m\widehat{AD} = m\widehat{DC}$, $m\widehat{AB} = 140^\circ$, $m\widehat{BC} = 100^\circ$.
أوجد قياس كل من $\angle 1, \angle 2, \angle 3$.



أولًا حدّد $m\widehat{DC}$ و $m\widehat{AD}$.

$m\widehat{AB} + m\widehat{BC} + m\widehat{DC} + m\widehat{AD} = 360^\circ$	نظرية جمع الأقواس
$140^\circ + 100^\circ + m\widehat{DC} + m\widehat{DC} = 360^\circ$	بالتعويض
$240^\circ + 2(m\widehat{DC}) = 360^\circ$	بالتبسيط
$2(m\widehat{DC}) = 120^\circ$	بطرح 240 من كلا الطرفين
$m\widehat{DC} = 60^\circ$	بالقسمة على 2

إذن، $m\widehat{DC} = 60^\circ$ وأيضًا $m\widehat{AD} = 60^\circ$.

$m\angle 3 = \frac{1}{2} m\widehat{BC} = \frac{1}{2}(100^\circ) = 50^\circ$

$m\angle 2 = \frac{1}{2} m\widehat{DC} = \frac{1}{2}(60^\circ) = 30^\circ$

$m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{AD} = \frac{1}{2}(60^\circ) = 30^\circ$

تحقق من فهمك

1A) أوجد $m\angle 4$.

1B) أوجد $m\angle 5$.

ارشادات

البرهان الحر

البرهان المستعمل لنظرية 8.5 يسمى برهانًا حرًا.

ارشادات

استعمال المتغيرات

يمكنك تخصيص متغيرات للتعبير عن القياسات غير المعلومة أو المجهولة. فإذا فرضنا أن $m\widehat{AD} = x^\circ$، فإن المعادلة الثانية تأخذ الشكل الآتي:

$140^\circ + 100^\circ + x + x = 360^\circ$

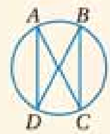
$= 240^\circ + 2x^\circ = 360^\circ$

و تبدو المعادلة الأخيرة أسهل للحل.

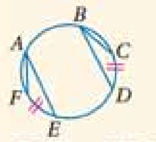
في المثال 1، لاحظ أن $\angle 3$ و $\angle 5$ تقابلان القوس نفسه فهما متطابقتان.

نظرية 8.6

إذا قابلت زاويتان محيطيتان في دائرة (أو دوائر متطابقة) القوس نفسه أو أقواسًا متطابقة، فإن الزاويتين تكونان متطابقتين.



$\angle DAC \cong \angle DBC$



$\angle FAE \cong \angle CBD$

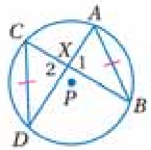
اختصار:

الزوايا المحيطية التي تقابل أقواسًا $\cong$ تكون $\cong$.

الزوايا المحيطية في الدائرة التي تقابل الأقواس نفسها تكون $\cong$.

سوف تبرهن نظرية 8.6 في تمرين 33.

مثال 2 برهان بالزوايا المحيطية



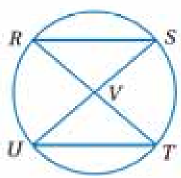
المعطيات: $\odot P$، فيها $\overline{CD} \cong \overline{AB}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle AXB \cong \triangle CXD$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle DAB$ تقابل $\widehat{DB}$ $\angle DCB$ تقابل $\widehat{DB}$	1) تعريف القوس المقابل
2) $\angle DAB \cong \angle DCB$	2) الزوايا المحيطية التي تقابل القوس نفسه تكون $\cong$
3) $\angle 1 \cong \angle 2$	3) الزوايا المتقابلة بالرأس تكون $\cong$
4) $\overline{CD} \cong \overline{AB}$	4) معطى
5) $\triangle AXB \cong \triangle CXD$	5) AAS

تحقق من فهمك



2) **المعطيات:** $\overline{RT}$ تنصف $\overline{SU}$؛ $\overline{RV} \cong \overline{SV}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle RVS \cong \triangle UVT$

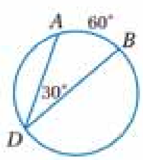
ويمكن أن تستعمل أيضًا قياس الزاوية المحيطية لتحديد احتمال وقوع نقطة على القوس.

مثال 3 أقواس الدائرة والاحتمال

الاحتمال: تقع النقطتان A و B على دائرة، بحيث $m\widehat{AB} = 60°$. افترض أن نقطة مثل D وضعت عشوائيًا على الدائرة نفسها، ولا تنطبق على A أو B. فما احتمال أن يكون $m\angle ADB = 30°$؟

بما أن قياس هذه الزاوية يساوي نصف قياس $\widehat{AB}$، فإن $\angle ADB$ محيطية تقابل $\widehat{AB}$. إذن يجب أن تقع D على القوس الأكبر AB.

ارسم شكلًا وضع عليه المعلومات التي تعرفها.



$$m\widehat{BDA} = 360° - m\widehat{AB}$$
$$= 360° - 60° = 300°$$

إرشادات

استبعاد الفرضية

في مثال 3 إذا افترضت أن النقطة D تقع على القوس الأصغر AB، فإن $\angle ADB$ تقابل القوس الأكبر. إذن
$m\angle ADB = \frac{1}{2}(300°) = 150°$
وهذا ليس قياس الزاوية المطلوبة لذلك يمكن استبعاد الفرضية أن D تقع على $\widehat{AB}$.

بما أن $\angle ADB$ تقابل $\widehat{AB}$، فإن احتمال أن $m\angle ADB = 30°$ يساوي احتمال وقوع D على القوس الأكبر.

احتمال أن تقع D على القوس الأكبر يساوي $\frac{300}{360}$ ، أو $\frac{5}{6}$. إذن احتمال أن يكون $m\angle ADB = 30°$ يساوي أيضًا $\frac{5}{6}$.

تحقق من فهمك

3) تقع النقطتان X و Y على دائرة، بحيث $m\widehat{XY} = 90°$. افترض أن النقطة Z وضعت عشوائيًا على الدائرة نفسها ولا تنطبق على X أو Y. فما احتمال أن يكون $m\angle XZY = 45°$؟

إرشادات

المضلع المحصور داخل دائرة

تذكر، ليكون المضلع محصورًا داخل دائرة (inscribed)، يجب أن تقع رؤوسه عليها.

زوايا المضلع المحصور داخل دائرة: المثلث المحصور داخل دائرة والذي يكون أحد أضلاعه قطرًا للدائرة هو مثلث من نوع خاص.

نظرية 8.7

إذا قابلت الزاوية المحيطية نصف دائرة، فإن هذه الزاوية تكون قائمة.

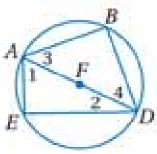
مثال: $\widehat{ADC}$ نصف دائرة، إذن $m\angle ABC = 90°$.

سوف تبرهن نظرية 8.7 في تمرين 34.

مثال

زوايا المثلث المحصور داخل دائرة

4 **جبر:** المثلثان ABD و ADE محصوران داخل $\odot F$ حيث $\widehat{BD} \cong \widehat{AB}$. إذا كان $m\angle 1 = 12x - 8$ و $m\angle 2 = 3x + 8$، فأوجد قياس $\angle 1$ و $\angle 2$.



AED زاوية قائمة لأن $\widehat{AED}$ نصف دائرة.

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle AED = 180$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$(12x - 8) + (3x + 8) + 90 = 180$ $m\angle 1 = 12x - 8, m\angle 2 = 3x + 8, m\angle AED = 90°$

$15x + 90 = 180$ بالتبسيط

$15x = 90$ بطرح 90 من كلا الطرفين

$x = 6$ بقسمة كلا الطرفين على 15

استعمل قيمة x لإيجاد قياس $\angle 1$ و $\angle 2$.

$m\angle 1 = 12x - 8$ معطى

$= 12(6) - 8$ $x = 6$

$= 64$ بالتبسيط

$m\angle 2 = 3x + 8$ معطى

$= 3(6) + 8$ $x = 6$

$= 26$ بالتبسيط

تحقق $90° + 64° + 26° = 180°$

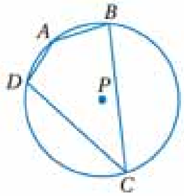
$180° = 180°$ ✓

تحقق من فهمك

4A) أوجد $m\angle 3$.

4B) أوجد $m\angle 4$.

مثال زوايا الشكل الرباعي المحصور داخل دائرة



5 الشكل الرباعي $ABCD$ محصور داخل $\odot P$. إذا كان $m\angle B = 80^\circ$ و $m\angle C = 40^\circ$، فأوجد $m\angle A$ و $m\angle D$.

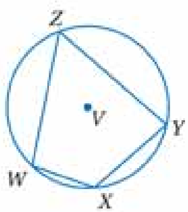
لإيجاد $m\angle A$ نحتاج إلى معرفة $m\widehat{BCD}$.
ولإيجاد $m\widehat{BCD}$ أوجد أولاً $m\widehat{DAB}$.

$m\widehat{DAB} = 2(m\angle C)$	نظرية الزاوية المحيطية
$= 2(40^\circ) = 80^\circ$	$m\angle C = 40^\circ$
$m\widehat{BCD} + m\widehat{DAB} = 360^\circ$	مجموع الزوايا المركزية في الدائرة $= 360^\circ$
$m\widehat{BCD} + 80^\circ = 360^\circ$	$m\widehat{DAB} = 80^\circ$
$m\widehat{BCD} = 280^\circ$	بطرح 80° من كلا الطرفين
$m\widehat{BCD} = 2(m\angle A)$	نظرية الزاوية المحيطية
$280^\circ = 2(m\angle A)$	بالتعويض
$140^\circ = m\angle A$	بقسمة كلا الطرفين على 2

لإيجاد $m\angle D$، نحتاج إلى معرفة $m\widehat{ABC}$ ولكن يجب أولاً إيجاد $m\widehat{ADC}$.

$m\widehat{ADC} = 2(m\angle B)$	نظرية الزاوية المحيطية
$m\widehat{ADC} = 2(80^\circ) = 160^\circ$	$m\angle B = 80^\circ$
$m\widehat{ABC} + m\widehat{ADC} = 360^\circ$	مجموع الزوايا المركزية في الدائرة $= 360^\circ$
$m\widehat{ABC} + 160^\circ = 360^\circ$	$m\widehat{ADC} = 160^\circ$
$m\widehat{ABC} = 200^\circ$	بطرح 160° من كلا الطرفين
$m\widehat{ABC} = 2(m\angle D)$	نظرية الزاوية المحيطية
$200^\circ = 2(m\angle D)$	بالتعويض
$100^\circ = m\angle D$	بقسمة كلا الطرفين على 2

تحقق من فهمك



5) الشكل الرباعي $WXYZ$ محصور داخل $\odot V$.
إذا كان $m\angle W = 95^\circ$ و $m\angle Z = 60^\circ$، فأوجد $m\angle X$ و $m\angle Y$.

في مثال 5، لاحظ أن الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي متكاملتان.

نظرية 8.8

إذا كان الشكل الرباعي محصورًا داخل دائرة، فإن الزوايا المتقابلة فيه تكون متكاملة.

مثال، الشكل الرباعي $ABCD$ محصور داخل $\odot P$.
$\angle A$ و $\angle C$ زاويتان متكاملتان.
$\angle B$ و $\angle D$ زاويتان متكاملتان.

ستبرهن نظرية 8.8 في تمرين 35.

إرشادات

الأشكال الرباعية

يمكن التحقق من نظرية 8.8 بملاحظة أن الأقواس المقابلة للزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي المحصور داخل دائرة تشكل دائرة.

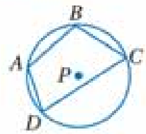
تأكد

مثال 1 (ص 193)

1) في $\odot R$، $m\widehat{MN} = 120^\circ$ و $m\widehat{MQ} = 60^\circ$.
أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة.

مثال 2 (ص 194)

2) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.
المعطيات: الشكل الرباعي $ABCD$ محصور داخل $\odot P$.
$m\angle C = \frac{1}{2} m\angle B$
المطلوب: إثبات أن $m\widehat{CDA} = 2(m\widehat{DAB})$

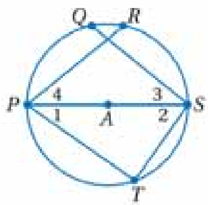


مثال 3 (ص 194)

3) **احتمال:** النقطتان X و Y طرفا قطر في $\odot W$، Z نقطة أخرى على الدائرة. أوجد احتمال أن تكون $\angle XZY$ زاوية قائمة.

مثال 4 (ص 195)

4) **جبر:** في $\odot A$، $\widehat{PQ} \cong \widehat{RS}$ كما في الشكل المجاور. أوجد قياس كل من الزوايا المرقّمة، إذا كان $m\angle 1 = 6x + 11,\ m\angle 2 = 9x + 19$
$m\angle 4 = 3y - 9\ ,\ m\angle 3 = 4y - 25$.



مثال 5 (ص 196)

5) الشكل الرباعي $VWXY$ محصور داخل $\odot C$. إذا كان $m\angle W = 110^\circ,\ m\angle X = 28^\circ$، فأوجد $m\angle V$ و $m\angle Y$.

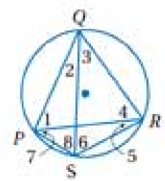
تمارين ومسائل

للتمارين	انظر الأمثلة
6–8	1
9	2
10–13	3
14–18	4
19–22	5

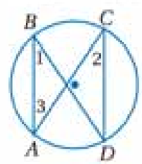
إرشادات للواجب المنزلي

أوجد قياس كل من الزوايا المرقّمة في التمارين 8–6 ، إذا كان:

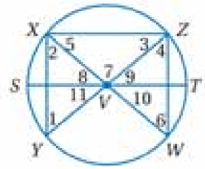
6) $\overline{PQ} \cong \overline{RQ},\ m\widehat{PS} = 45^\circ$
$m\widehat{SR} = 75^\circ$



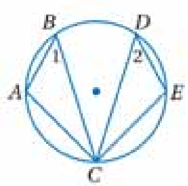
7) $m\angle BDC = 25^\circ,$
$m\widehat{AB} = 120^\circ,$
$m\widehat{CD} = 130^\circ$



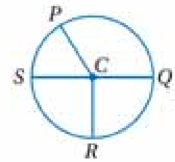
8) $\overline{XY} \perp \overline{ST}\ ,\ m\widehat{XZ} = 100^\circ$
$\overline{ZW} \perp \overline{ST}$



9) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين:
المعطيات: $\widehat{AB} \cong \widehat{DE}$ و $\widehat{AC} \cong \widehat{CE}$
المطلوب: إثبات أن: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$



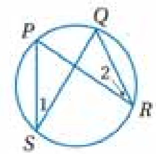
احتمال: استعمل المعلومات الآتية في حل التمارين 13–10.
في $\odot C$، اختيرت نقطة T عشوائيًا بحيث لا تنطبق على أي من النقاط P, Q, R, S وكان $\overline{SQ}$ قطرًا في $\odot C$.



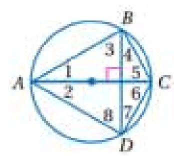
10) إذا علمت أن $m\widehat{PS} = 40°$، فأوجد احتمال أن يكون $m\angle PTS = 20°$.
11) إذا علمت أن $m\widehat{PSR} = 110°$، فأوجد احتمال أن يكون $m\angle PTR = 55°$.
12) أوجد احتمال أن يكون $m\angle STQ = 90°$.
13) أوجد احتمال أن يكون $m\angle PTQ = 180°$.

جبر: أوجد قياس كل من الزوايا المرقّمة في كل شكل مما يأتي.

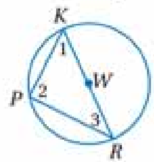
14) $m\angle 1 = x,$
$m\angle 2 = 2x - 30$



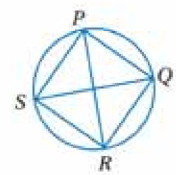
15) $m\widehat{AB} = 120°$



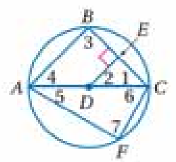
16) $m\angle R = \frac{1}{3}x + 5$
$m\angle K = \frac{1}{2}x$



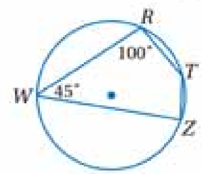
17) $PQRS$ معيّن محصور داخل دائرة. أوجد $m\angle QRP$ ، $m\widehat{SP}$.



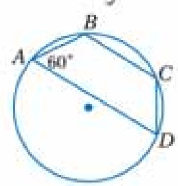
18) في $\odot D$ ، $\overline{DE} \cong \overline{EC}, m\widehat{CF} = 60°$.
و $\overline{EC} \perp \overline{DE}$ ، أوجد $m\angle 4, m\angle 5, m\widehat{AF}$



19) الشكل الرباعي $WRTZ$ محصور داخل دائرة. أوجد $m\angle T$ و $m\angle Z$.

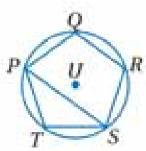


20) شبه المنحرف $ABCD$ محصور داخل دائرة. أوجد $m\angle B, m\angle C$ و $m\angle D$.

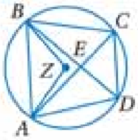


21) المستطيل $PDQT$ محصور داخل دائرة. ماذا يمكنك أن تستنتج عن $\overline{PQ}$؟
22) المربع $EDFG$ محصور داخل دائرة. ماذا يمكنك أن تستنتج عن $\overline{EF}$؟

الخماسي المنتظم $PQRST$ محصور داخل $\odot U$.
أوجد قياس كل مما يأتي:



23) $m\widehat{QR}$
24) $m\angle PSR$
25) $m\angle PQR$
26) $m\widehat{PTS}$



الشكل الرباعي $ABCD$ محصور داخل $\odot Z$ بحيث إن
$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $m\angle BZA = 104°$, $m\widehat{CB} = 94°$

أوجد قياس كل مما يأتي:

27) $m\widehat{BA}$

28) $m\widehat{ADC}$

29) $m\angle BDA$

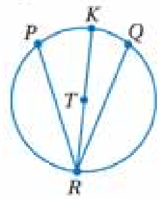
30) $m\angle ZAC$

برهان: اكتب برهانًا من النوع المشار إليه لكل نظرية مما يأتي:

31) **برهانا ذا عمودين،** حالة 2 من نظرية 8.5

المعطيات: يقع المركز T داخل $\angle PRQ$،
$\overline{RK}$ قطر.

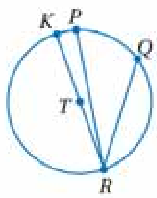
المطلوب: إثبات أن $m\angle PRQ = \frac{1}{2}m\widehat{PKQ}$



32) **برهانا ذا عمودين،** حالة 3 من نظرية 8.5

المعطيات: يقع المركز T خارج $\angle PRQ$،
$\overline{RK}$ قطر.

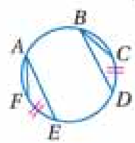
المطلوب: إثبات أن $m\angle PRQ = \frac{1}{2}m\widehat{PQ}$



33) **برهانًا ذا عمودين،** نظرية 8.6

المعطيات: $\widehat{DC} \cong \widehat{EF}$

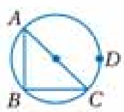
المطلوب: إثبات أن $\angle FAE \cong \angle CBD$



34) **برهانًا حرًا،** نظرية 8.7

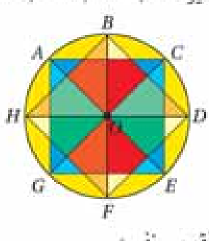
المعطيات: $\widehat{ABC}$ نصف دائرة.

المطلوب: إثبات أن $\angle ABC$ زاوية قائمة.



35) اكتب برهانًا حرًّا لنظرية 8.8 التي تنص على أنه: إذا كان الشكل الرباعي محصورًا داخل دائرة، فإن الزوايا المتقابلة فيه تكون متكاملة.

زجاج ملوّن: في تصميم النوافذ ذات الزجاج الملون، جميع الأقواس الصغيرة ... , $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ في الدائرة متطابقة. افترض أن مركز الدائرة هو النقطة O.



36) ما قياس كل قوس من هذه الأقواس الصغيرة؟

37) ما نوع $\triangle AOC$؟ وضّح ذلك.

38) ما نوع الشكل الرباعي $BDFH$؟ وضّح ذلك.

39) مانوع الشكل الرباعي $ACEG$؟ وضّح ذلك.

مسائل مهارات التفكير العليا

40) **تبرير:** قارن بين الزاوية المحيطية والزاوية المركزية اللتين تقابلان القوس نفسه.

41) **مسألة مفتوحة:** أوجد شعارًا من واقع الحياة يحوي مضلعًا محصورًا داخل دائرة.

42) **تحدٍّ :** شبه المنحرف $ABCD$ محصور داخل $\odot O$. وضّح كيف تتحقق أن $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.

43) **اكتب :** استعمل المعلومات حول مفتاح الصواميل الوارد ذكره في صفحة 192، وتعريف المضلع المحصور داخل دائرة لتوضيح وجه الشبه بينهما. موضّحًا كيف تجد طول ضلع السداسي المنتظم المحصور داخل دائرة قطرها $\frac{3}{4}$ in .

تدريب على اختبار معياري

44) مربع محصور داخل دائرة. ما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟

A $\frac{1}{4}$ C $\frac{\pi}{2}$

B $\frac{1}{2}$ D $\frac{\pi}{4}$

45) في $\odot D$ ،القطران $\overline{AB}$ و $\overline{EF}$ متعامدان وطول نصف القطر يساوي 4 . أوجد AF.

F 4 H 8

G $4\sqrt{2}$ J $8\sqrt{2}$

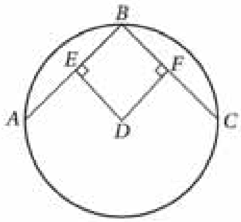
مراجعة :
في $\odot D$ ، $CF = 8$ ، $DC = 10$ ، $DE = FD$ ، ما طول $\overline{AB}$ مستعملًا الشكل أدناه :

F 6

H 10

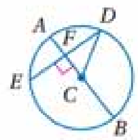
G 8

J 16



مراجعة تراكمية

أوجد قياس كل مما يأتي: (الدرس 8-3)



46) إذا كان $AB = 60$ و $DE = 48$ ، فأوجد CF.

47) إذا كان $AB = 32$ و $FC = 11$ ، فأوجد FE.

48) إذا كان $DE = 60$ و $FC = 16$ ، فأوجد AB.

تقع النقطتان Q و R على $\odot P$. أوجد طول $\widehat{QR}$ إذا أعطيت نصف القطر وقياس الزاوية في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 8-2)

49) $m\angle QPR = 60^\circ$ و $PR = 12$

50) $m\angle QPR = 90^\circ, PR = 16$

51) **تصوير :** صوّر زياد نفسه بجوار شجرة ، وبقياس الأطوال في الصورة وجد أن طوله 1.5 cm وطول الشجرة 5.3 cm. إذا كان طول زياد الحقيقي 1.7m، فما طول الشجرة الفعلي مقربًا إلى أقرب متر؟ (الدرس 6-1)

أكمل كل جملة باستعمال إحدى الكلمات: *أحيانًا*، *دائمًا*، أو *أبدًا* . (مهارة سابقة)

52) المثلثات متطابقة الأضلاع تكون متطابقة الضلعين ....

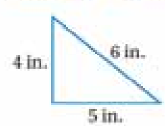
53) المثلثات حادة الزوايا تكون متطابقة الأضلاع ....

54) المثلثات منفرجة الزاوية تكون مختلفة الأضلاع ....

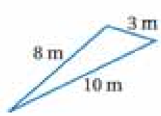
استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية : حدد إذا كان كل مثلث مما يأتي قائم الزاوية أم لا: (مهارة سابقة)

55)



56)



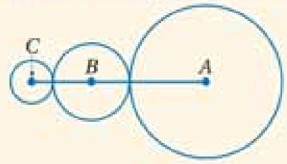
57)

الفصل

8 اختبار منتصف الفصل

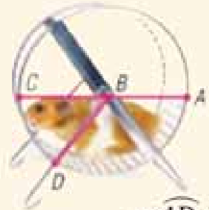
الدروس 1 - 8 إلى 4 - 8

1) **اختبار من متعدد :** في الشكل أدناه، طول نصف قطر الدائرة A يساوي ضعف طول نصف قطر الدائرة B وأربعة أمثال طول نصف قطر الدائرة C. إذا كان مجموع محيطات الدوائر الثلاث يساوي 42π ، فأوجد طول $\overline{AC}$. (الدرس 1-8)



A 22
B 27
C 30
D 34

اعتمد الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة 8-2.
(الدرسان 2-8 ، 1-8)



2) سمّ الدائرة .

3) سمّ ثلاثة أنصاف أقطار للدائرة.

4) إذا كان $BD = 3x$ و $CB = 7x - 3$ ، فأوجد AC.

5) إذا كان $m\angle CBD = 85^\circ$ ، فأوجد $m\widehat{AD}$.

6) إذا كان $r = 3$ ، فأوجد محيط الدائرة B إلى أقرب عُشر.

7) يوجد 40 دعامة متساوية الأبعاد على العجلة. ما قياس كل قوس يربط دعامتين متتاليتين بالدرجات؟

8) إذا كان $m\angle ABD = 150^\circ$ و $r = 3$، فما طول $\widehat{CAD}$ إلى أقرب جزء من عشرة؟

برامج تعليمية : ارجع إلى الجدول أدناه الذي يبيّن عدد البرامج التعليمية التي يشاهدها طلاب مدرسة ثانوية كل أسبوع، لحل الأسئلة 11–9. (الدرس 2-8)

البرامج التعليمية	
لم يشاهدوا أي برنامج	17%
شاهدوا برنامجًا واحدًا	53%
شاهدوا برنامجين	23%
شاهدوا ثلاثة برامج أو أكثر	7%

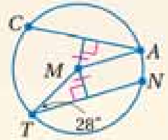
9) إذا رغبت في تمثيل هذه البيانات بقطاعات دائرية، فما قياس زاوية كل قطاع؟

10) صف أقواس كل قطاع.

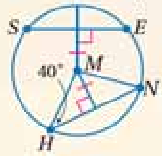
11) ارسم دائرة تمثل هذه البيانات.

أوجد القياس المطلوب في كل مما يأتي: (الدرس 3-8)

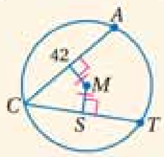
12) $m\angle CAM$



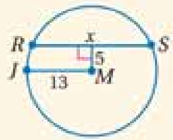
13) $m\widehat{ES}$



14) SC



15) x



16) **اختبار من متعدد :** طول قطر دائرة 30 in، وطول وتر فيها 24 in. كم يبعد مركز الدائرة عن الوتر؟ (الدرس 3-8)

F 5 in　　**H** 9 in

G 7 in　　**J** 11 in

17) الشكل الرباعي $WXYZ$ محصور داخل دائرة. إذا كان $m\angle X = 50^\circ$ و $m\angle Y = 70^\circ$ ، فأوجد $m\angle W$ و $m\angle Z$. (الدرس 4-8)

18) **العجلة الدوّارة**

إذا كانت المسافات بين محاور مقاعد العجلة المبينة في الصورة متساوية، فما قياس الزاوية بين كل محور والدعامة التي تصل بين مقعدين متتاليين؟ (الدرس 4-8)

19) **احتمال :**

في $\odot A$ ، وضعت النقطة X عشوائيًا بحيث لا تنطبق على النقطة P ولا النقطة Q. إذا كان $m\widehat{PQ} = 160^\circ$ ، فما احتمال أن يكون $m\angle PXQ = 80^\circ$؟ (الدرس 4-8)

20) أوجد قياس الزاويتين 1 ، 2 في الشكل المجاور (الدرس 4-8)

8-5 المماسات
Tangents

استعد

لعبة رمي المطرقة (hammer)، من ألعاب القوى التي سجل فيها الرياضيون العرب أرقامًا ممتازة على مستوى قارة آسيا. وتتألف المطرقة من سلك فولاذي مع كرة معدنية مربوطة بأحد طرفيه، ومقبض مثبت بالطرف الآخر، وتزن المطرقة بأكملها 7.26 kg تقريبًا، وطولها يقارب 120 cm. ويستعمل اللاعب كلتا يديه، فيمسك المقبض ويدور حول نفسه ثلاث أو أربع مرات في دائرة رمي قطرها 2.135 m ، قبل أن يطلق المطرقة، وأكبر مسافة تقطعها المطرقة تحدد الفائز.

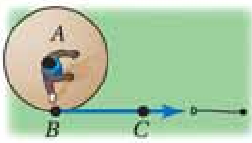
الأفكار الرئيسة:
- أستعمل خصائص المماسات.
- أحل مسائل تتضمن مضلعات محصورة داخل دوائر.

المفردات:

مماس
tangent

نقطة التماس
point of tangency

المماسات: يبيّن الشكل أعلاه عملية رمي المطرقة. حيث تمثل الدائرة A المنطقة التي يكون فيها اللاعب، ونصف المستقيم $\overrightarrow{BC}$ يمثل المسار الذي تسلكه المطرقة عندما يتركها اللاعب. و $\overrightarrow{BC}$ **مماس للدائرة** A، لأن المستقيم الذي يحوي $\overrightarrow{BC}$ يقطع الدائرة في نقطة واحدة فقط. وهذه النقطة تسمى **نقطة التماس**.

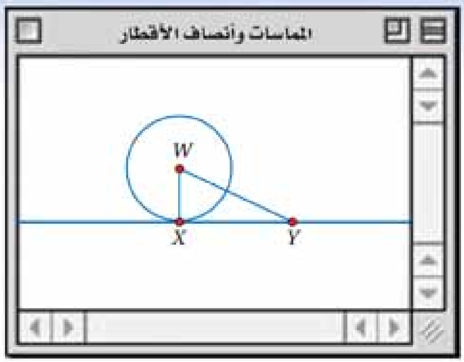


معمل الهندسة

المماسات وأنصاف الأقطار

نموذج

- استعمل برنامج رسم هندسي لرسم دائرة مركزها W، ثم ارسم مماسًا للدائرة W، وسمِّ نقطة التماس X.
- اختر نقطة أخرى على المماس وسمّها Y، ثم ارسم $\overline{WY}$.



فكر وناقش

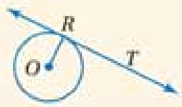
1) ما علاقة $\overline{WX}$ بالدائرة؟
2) قِسْ $\overline{WY}$ و $\overline{WX}$. وقارن بينهما.
3) حرك النقطة Y. كيف يؤثر موقع Y في العلاقة التي كتبتها في السؤال 2؟
4) قِسْ $\angle WXY$. ماذا تستنتج؟
5) **خمِّن:** ضَع تخمينًا حول أقصر مسافة من مركز الدائرة إلى المماس؟

تبين نتائج المعمل الهندسي أن أقصر مسافة من مركز الدائرة إلى المماس، هي نصف القطر الواصل إلى نقطة التماس. وبما أن أقصر مسافة من نقطة إلى خط هي القطعة العمودية، فإنّ نصف القطر يكون عموديًّا على المماس.

نظرية 8.9

إذا كان مستقيم مماسًّا لدائرة، فإنه يكون عموديًّا على نصف القطر المار بنقطة التماس.

مثال، إذا كان $\overleftrightarrow{RT}$ مماسًّا، فإن $\overline{OR} \perp \overleftrightarrow{RT}$.



ستبرهن نظرية 8.9 في التمرين 24.

إرشادات

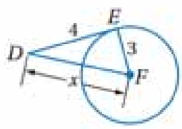
المماسات

جميع النظريات التي تُطبق على المماسات، تُطبق أيضًا على أجزاء مماسات الدائرة.

مثال

إيجاد الأطوال

1 جبر: إذا كان $\overline{ED}$ مماسًّا لـ $\odot F$ عند النقطة E كما في الشكل المجاور، فأوجد قيمة x.



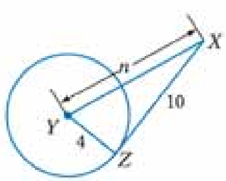
بما أن نصف قطر الدائرة يكون عموديًّا على المماس عند نقطة التماس، فإنّ $\overline{DE} \perp \overline{EF}$. وهذا يجعل $\angle DEF$ زاوية قائمة، والمثلث DEF قائم الزاوية. استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة x.

$(EF)^2 + (DE)^2 = (DF)^2$	نظرية فيثاغورس
$3^2 + 4^2 = x^2$	$EF = 3, DE = 4, DF = x$
$25 = x^2$	بالتبسيط
$5 = x$	أخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

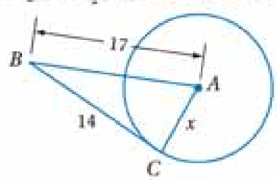
لأن x هي طول $\overline{DF}$، أهمل الجذر التربيعي السالب .

تحقق من فهمك

1A) إذا كان $\overline{XZ}$ مماسًّا لـ $\odot Y$ عند النقطة Z كما في الشكل أدناه. فأوجد قيمة n.

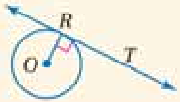


1B) إذا كان $\overline{BC}$ مماسًّا لـ $\odot A$ عند النقطة C كما في الشكل أدناه. فأوجد قيمة x.



نظرية 8.10

إذا تعامد مستقيم مع نصف قطر دائرة عند نهايته على الدائرة، فإن هذا المستقيم يكون مماسًا للدائرة.

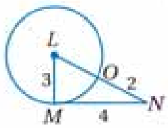


مثال: إذا كان $\overleftrightarrow{RT} \perp \overline{OR}$، فإن $\overleftrightarrow{RT}$ مماس للدائرة.

ستبرهن هذه النظرية في التمرين 25.

مثال 2 تحديد المماسات

a) حدّد إذا كانت $\overline{MN}$ مماسًا لـ $\odot L$ مستعملًا الشكل المجاور، وبرر إجابتك.



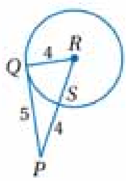
حدّد أولًا ما إذا كان $\triangle LMN$ قائم الزاوية، وذلك باستعمال عكس نظرية فيثاغورس.

$(LM)^2 + (MN)^2 \stackrel{?}{=} (LN)^2$	عكس نظرية فيثاغورس
$3^2 + 4^2 \stackrel{?}{=} 5^2$	$LM = 3, MN = 4, LN = 3 + 2 = 5$
$25 = 25 \checkmark$	بالتبسيط

بما أن $3^2 + 4^2 = 5^2$، فإن عكس نظرية فيثاغورس يؤكد أن $\triangle LMN$ قائم الزاوية، وأن $\angle LMN$ هي الزاوية القائمة.

لذلك $\overline{LM} \perp \overline{MN}$، إذن $\overline{MN}$ مماس للدائرة L.

b) حدد ما إذا كانت $\overline{PQ}$ مماسًا لـ $\odot R$ مستعملًا الشكل المجاور، وبرر إجابتك.



$RP = RS + SP$

$RP = 4 + 4 = 8$	$RQ = RS = 4$
$(RQ)^2+(PQ)^2 \stackrel{?}{=} (RP)^2$	عكس نظرية فيثاغورس
$4^2 + 5^2 \stackrel{?}{=} 8^2$	$RQ=4$, $PQ=5$, $RP=8$
$41 \neq 64$	بالتبسيط

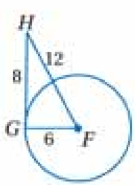
وبما أن $(RQ)^2 + (PQ)^2 \neq (RP)^2$ فإن $\triangle RQP$ ليس قائم الزاوية ،

إذًا $\overline{PQ}$ ليست مماسًا لـ $\odot R$.

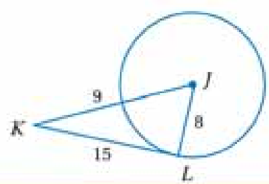
المثلث PQR ليس قائم الزاوية وعليه فإن $\overline{QP}$ ليس مماسًا للدائرة.

تحقق من فهمك

2A) حدد إذا كانت $\overline{GH}$ مماسًا لـ $\odot F$ مستعملًا الشكل المجاور، وبرر إجابتك.



2B) حدد إذا كانت $\overline{KL}$ مماسًا لـ $\odot J$ مستعملًا الشكل المجاور، وبرر إجابتك.

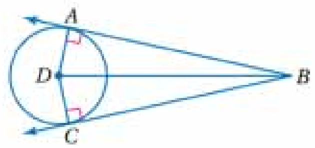


إرشادات

تحديد المماسات

لا تفترض أن القطعة المستقيمة مماس لدائرة بمجرد النظر، إلا إذا ورد في النص، أو ظهرت إشارة الزاوية القائمة، أو احتوى الشكل قياسات تثبت من خلالها أن الزاوية قائمة.

يمكن أن يكون للدائرة نفسها أكثر من مماس من نقطة واحدة خارجها.



ففي الشكل المجاور، $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ مماسان لـ $\odot D$. لذلك

$$(AB)^2 + (AD)^2 = (DB)^2$$
$$(BC)^2 + (CD)^2 = (DB)^2$$

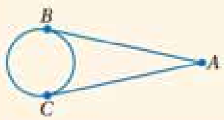
إذن $(AB)^2 + (AD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2$	بالتعويض
$(AB)^2 + (AD)^2 = (BC)^2 + (AD)^2$	$AD = CD$
$(AB)^2 = (BC)^2$	بطرح $(AD)^2$ من كلا الطرفين
$AB = BC$	بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

أيْ أن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. وهذا هو برهان نظرية 8.11 الآتية.

نظرية 8.11

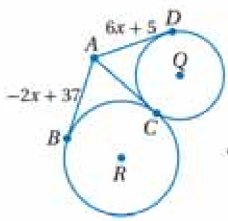
إذا رُسمت قطعتان مستقيمتان مماستان لدائرة من نقطة خارجها فإنهما متطابقتان.

مثال: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$



مثال — المماسات المتطابقة

3 جبر: أوجد قيمة x. افترض أن القطع المستقيمة الظاهرة في الشكل أدناه، مماسات للدائرتين.



$\overline{AD}$ و $\overline{AC}$ مماسان رُسما من النقطة الخارجة نفسها.

لـ $\odot Q$ لذا، $\overline{AD} \cong \overline{AC}$.

$\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ مماسان لـ $\odot R$ رُسما من النقطة الخارجة نفسها، لذلك $\overline{AC} \cong \overline{AB}$.

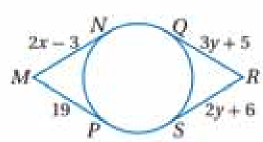
ومن خاصية التعدي ينتج أن $\overline{AD} \cong \overline{AB}$

ويكون:

$AD = AB$	تعريف القطع المتطابقة
$6x + 5 = -2x + 37$	بالتعويض
$8x + 5 = 37$	بإضافة $2x$ لكلا الطرفين
$8x = 32$	بطرح 5 من كلا الطرفين
$x = 4$	بقسمة كلا الطرفين على 8

تحقق من فهمك

3) أوجد قيمة كلٍّ من x و y في الشكل المجاور.

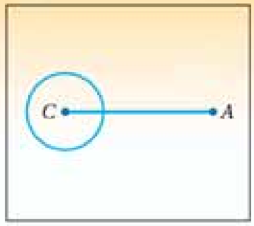


في الإنشاء الهندسي الآتي سوف تتعلم كيف تنشئ مماسًا لدائرة من نقطة خارجها.

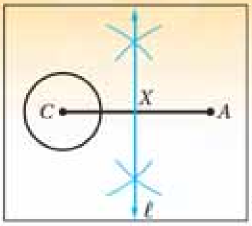
إنشاءات هندسية

رسم مماس لدائرة من نقطة خارجها

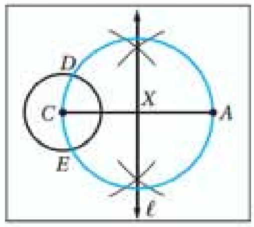
خطوة 1: ارسم دائرة مركزها C. وحدّد نقطة خارجها، ثم ارسم $\overline{CA}$.



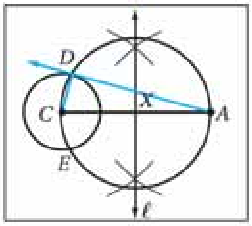
خطوة 2: ارسم العمود المنصّف للقطعة CA، وسمّه المستقيم ℓ. سمِّ نقطة تقاطع ℓ و $\overline{CA}$ بالنقطة X.



خطوة 3: ارسم الدائرة X بنصف قطر $\overline{XC}$. وسمّ نقطتي تقاطع الدائرتين بالحرفين D و E.



خطوة 4: ارسم $\overleftrightarrow{AD}$ فيكون $\triangle ADC$ محصورًا داخل نصف دائرة. إذن، $\angle ADC$ قائمة، و $\overleftrightarrow{AD}$ مماس لـ $\odot C$.



سوف تنشئ مماسًا لدائرة من نقطة عليها في تمرين 23

المضلعات المحيطة بدوائر: لقد تعلمت في درس 3–8، أن الدوائر يمكن أن تحوي مضلعًا أو تُحيط به. وبالمثل يمكن أن يحيط المضلع بدائرة، أو أن تكون الدائرة مرسومة داخل المضلع. لاحظ أن رؤوس المضلع لا تقع على الدائرة، ولكن أضلاع المضلع تكون مماسات لهذه الدائرة.

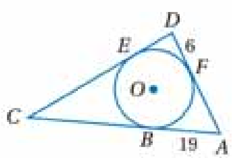
مضلعات تحيط بدوائر — مضلعات لا تحيط بدوائر

إرشادات

خطأ شائع

إذا كانت الدائرة تمس أحد أضلاع المضلع أو بعضها، فلا يعني ذلك أن المضلع يحيط بالدائرة، كما هو مبين في الشكل المجاور.

مثال: المثلثات التي تحيط بدائرة



4 المثلث ADC يحيط بـ $\odot O$.

أوجد محيط $\triangle ADC$، إذا كان $EC = DE + AF$.

استعمل النظرية 8.10 لتحديد القياسات المتساوية:

$EC = CB\,,\ AB = AF = 19\,,\ FD = DE = 6$

ومن المعطيات $EC = DE + AF$، إذن $EC = 6 + 19 = 25$،

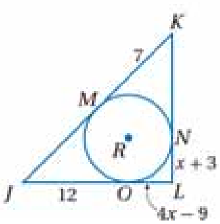
افرض أن محيط $\triangle ADC$ هو P.

$P = AB + BC + EC + DE + FD + AF$ تعريف المحيط

$= 19 + 25 + 25 + 6 + 6 + 19 = 100$ بالتعويض

إذن محيط $\triangle ADC$ يساوي 100 وحدة.

تحقق من فهمك

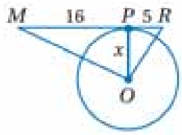


4) المثلث JKL يحيط بـ $\odot R$. أوجد قيمة x، ومحيط $\triangle JKL$.

تأكد

المثالان 1 و 2
(ص 203-204)

استعمل الشكل المجاور لحل التمرينين 1 و 2.

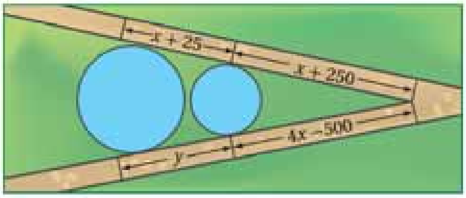


1) رُسم المماس $\overline{MP}$ لـ $\odot O$. إذا كان $MO = 20$، فأوجد قيمة x.

2) إذا كان $RO = 13$ ، فحدّد ما إذا كانت $\overline{PR}$ مماسًا لـ $\odot O$ أم لا.

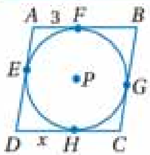
مثال 3
(ص 205)

3) **هندسة الطرق:** خطط مهندس ممرين للمشاة بجانب بركتين، كما هو واضح في الصورة. أوجد قيمة كل من x و y .



مثال 4
(ص 206)

4) المعيّن $ABCD$ يحيط بـ $\odot P$ ، فإذا كان محيطه يساوي 32 وحدة، فأوجد قيمة x.

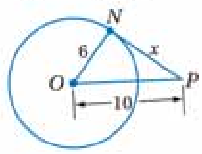


تمارين ومسائل

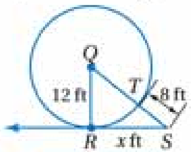
إرشادات للواجب المنزلي	
للتمارين	انظر الأمثلة
5-10	1
11-14	2
15,16	3
17-22	4

أوجد قيمة x في كل مما يأتي، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات هي مماسات فعلاً.

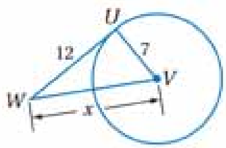
5)



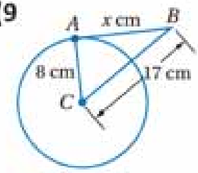
6)



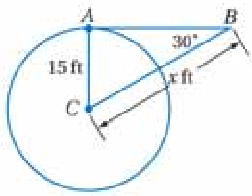
7)



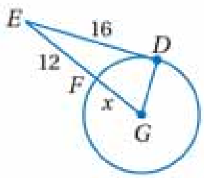
8)



9)

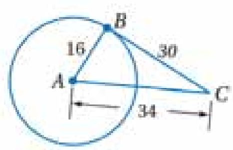


10)

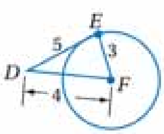


حدد إذا كانت كل قطعة مستقيمة فيما يأتي مماسًا للدائرة أم لا:

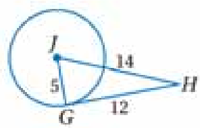
11) $\overline{BC}$



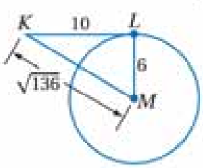
12) $\overline{DE}$



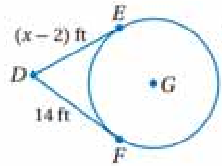
13) $\overline{GH}$

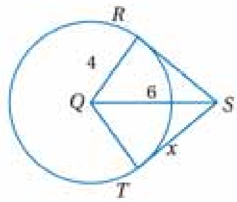


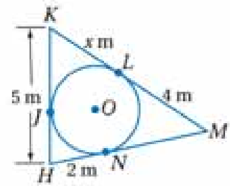
14) $\overline{KL}$

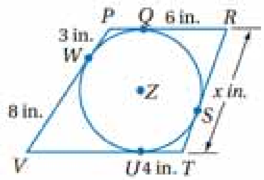


أوجد قيمة x في كل مما يأتي، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات للدائرة هي مماسات فعلاً.

(15


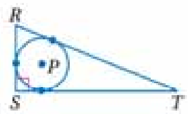
(16


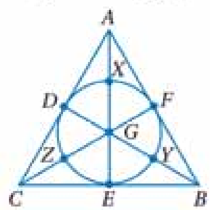
(17


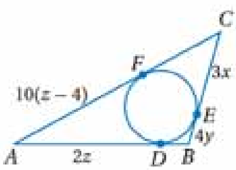
(18


استعمل المعطيات لإيجاد محيط كل مضلع فيما يأتي:

(19


(20 $ST = 18$ وطول نصف قطر $\odot P$ يساوي 5


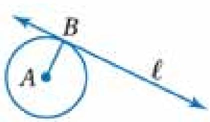
(21 $BY = CZ = AX = 2$
وطول نصف قطر $\odot G$ يساوي 3


(22 $CF = 6(3 - x), DB = 12y - 4$


23) **إنشاء:** ارسم مماسًا لدائرة عند نقطة تقع عليها باتباع الخطوات الآتية:

- ارسم دائرة مركزها T، وعيّن نقطة P على $\odot T$، ثم ارسم $\overrightarrow{TP}$.
- ارسم عمودًا على $\overrightarrow{TP}$ عند النقطة P.

24) **برهان:** اكتب برهانًا غير مباشر للنظرية 8.9،
مفترضًا أن المستقيم ℓ ليس عموديًا على $\overline{AB}$.
المعطيات: ℓ مماس $\odot A$ عند النقطة B؛ $\overline{AB}$ نصف قطر في $\odot A$.
المطلوب: إثبات أن ℓ عمودي على $\overline{AB}$.



25) **برهان:** اكتب برهانًا غير مباشر للنظرية 8.10 مفترضًا أن المستقيم ℓ ليس مماسًا لـ $\odot A$.
المعطيات: $\ell \perp \overline{AB}$، $\overline{AB}$ نصف قطر في $\odot A$.
المطلوب: إثبات أن ℓ مماس لـ $\odot A$.

إرشادات

مراجعة

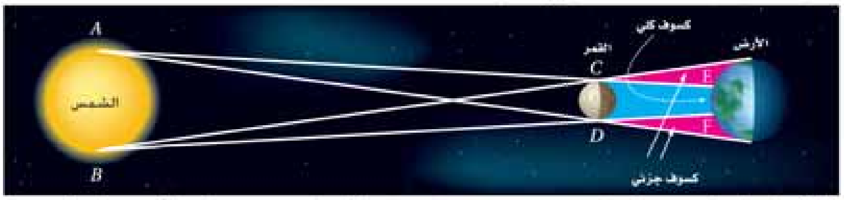
تذكر أن طريقة البرهان غير المباشر هي أن تفترض أن المطلوب غير صحيح ثم تصل إلى تناقض مع المعطى أو مع حقيقة مثبتة من قبل أو مع تعريف أو مسلمة.

الربط مع الحياة

إن الكسوف والخسوف آيتان عظيمتان يخوف الله عز وجل بهما عبادة.

26) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين؛ لإثبات أنه إذا أحاط شكل رباعي بدائرة فإن مجموع طولي أي ضلعين متقابلين يساوي مجموع طولي الضلعين الآخرين.

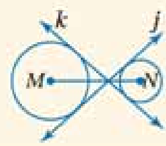
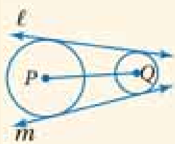
فلك: **استعمل المعلومات الآتية لحل السؤالين 27 و 28:**
يحدث كسوف الشمس عندما يحجب القمر أشعة الشمس فلا تصل إلى الأرض. فبعض المناطق على الأرض يحدث فيها كسوف كلي، وبعضها الآخر يحدث فيها كسوف جزئي، وبعضها لا يحدث فيه كسوف على الإطلاق، كما يظهر في الصورة.



27) المنطقة الزرقاء تدل على حدوث كسوف كلي على ذلك الجزء من سطح الأرض. فأي المماسات تحدد المنطقة الزرقاء؟

28) المنطقة ذات اللون الزهري تحدد منطقة من سطح الأرض يظهر فيها كسوف جزئي. فأي المماسات تحدد الحدود الشمالية والجنوبية للكسوف الجزئي؟

المماسات المشتركة: المستقيم الذي يمس دائرتين في المستوى نفسه يسمى *مماسًا مشتركًا*.

المماسات الداخلية المشتركة تقطع القطعة المستقيمة الواصلة بين المركزين.	المماسات الخارجية المشتركة لا تقطع القطعة المستقيمة الواصلة بين المركزين.
المستقيمان k و j مماسان داخليان مشتركان. 	المستقيمان ℓ و m مماسان خارجيان مشتركان. 

ارجع إلى الرسم أعلاه الذي يبين الكسوف، وسمِّ:

29) مماسين داخليين مشتركين.

30) مماسين خارجيين مشتركين.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **تبرير:** حدد عدد المماسات التي يمكن رسمها لدائرة من كل نقطة من النقاط الآتية. وبرر إجابتك.

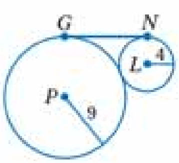
a) النقطة خارج الدائرة.

b) النقطة داخل الدائرة.

c) النقطة على الدائرة.

32) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثالًا على مضلع يحيط بدائرة، وآخر على دائرة تحيط بمضلع. وأعطِ أمثلة أخرى من واقع الحياة.

33) **تحدٍّ:** أوجد طول المماس $\overline{GN}$ في الشكل المجاور. ووضّح إجابتك.



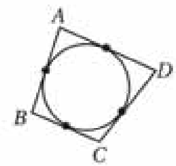
34) **تبرير** اكتب برهانًا يثبت صحة العبارة الآتية إذا كانت صحيحة، وأعط مثالًا مضادًا إذا كانت خاطئة.

" *إذا رُسم مماسان للدائرة نفسها، فإنهما يتقاطعان* " .

35) **اكتب:** استعمل المعلومات المتعلقة بالمماس ورياضة رمي المطرقة الموجودة في صفحة 202، وفسّر كيف أن مسار الكرة المعدنية يمثل مماسًا.

تدريب على اختبار معياري

36) الشكل الرباعي $ABCD$ يحيط بدائرة. إذا كان $BC = 6$, $AB = 19$, $CD = 14$ ، فما طول $\overline{AD}$؟



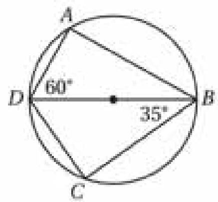
A 11　　C 25

B 20　　D 27

37) **مراجعة:** في $\odot M$،

$m\angle ADB = 60^\circ,\ m\angle DBC = 35^\circ$

ما قياس $\angle D$ ؟



F 60°

G 95°

H 110°

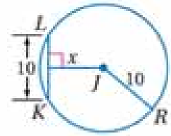
J 115°

مراجعة تراكمية

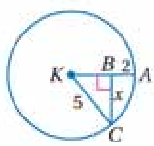
38) **إعلانات:** تستعمل الأشكال الدائرية كثيرًا في عمل شعارات للإعلان عن المنتجات التجارية. والشعار المجاور يُظهر زاويتين محيطيتين وزاويتين مركزيتين. فإذا كان $\widehat{AC} \cong \widehat{BD},\ m\widehat{AF} = 90^\circ,\ m\widehat{FE} = 45^\circ$ و $m\widehat{ED} = 90^\circ$ ، فأوجد $m\angle AFC$ و $m\angle BED$. (الدرس 4-8)

أوجد كلًّا من القياسات الآتية إلى أقرب جزء من عشرة: (الدرس 3-8)

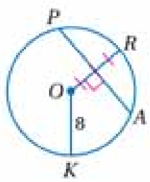
39) x



40) BC



41) AP



استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: حل كل معادلة مما يأتي: (مهارة سابقة)

42) $x + 3 = \frac{1}{2}[(4x + 6) - 10]$

43) $2x - 5 = \frac{1}{2}[(3x + 16) - 20]$

44) $2x + 4 = \frac{1}{2}[(x + 20) - 10]$

45) $x + 3 = \frac{1}{2}[(4x + 10) - 45]$

توسع
8-5

معمل الهندسة

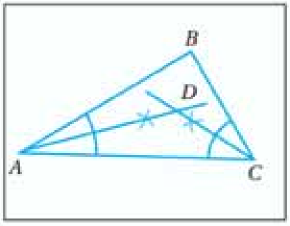
المثلثات المحصورة داخل دائرة والمثلثات المحيطة بها
Inscribed and Circumscribed Triangles

لقد تعلمت في دراستك السابقة أن هناك نقاطًا خاصة تنتج عن تلاقي عدة مستقيمات في المثلث. وستُستعمل نقطتان من هذه النقاط في النشاطات الآتية.

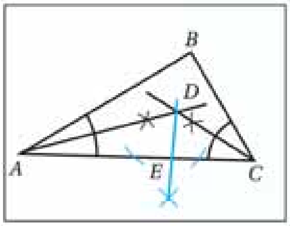
- *مركز الدائرة التي تمس أضلاع المثلث من الداخل* (Incenter) هي نقطة تلاقي منصّفات زواياه، وتبعد مسافات متساوية عن أضلاع المثلث.
- *مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث* (circumcenter)، وهي نقطة تقاطع الأعمدة المنصّفة لأضلاعه، وتبعد مسافات متساوية عن رؤوسه.

نشاط **رسم دائرة داخل مثلث.** المثلث يحيط بالدائرة.

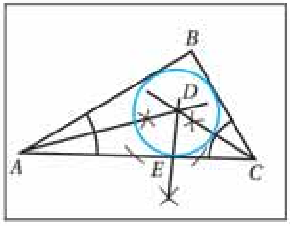
خطوة 1، ارسم مثلثًا وسمِّ رؤوسه A, B, C. وارسم منصّفين لزاويتين كي تحدد مركز الدائرة الداخلية للمثلث. وارمز إليه بالرمز D.



خطوة 2، ارسم قطعة مستقيمة عمودية على أحد أضلاع المثلث $\triangle ABC$ تمر بمركز الدائرة الداخلية للمثلث. وارمز إلى نقطة التقاطع بالرمز E.

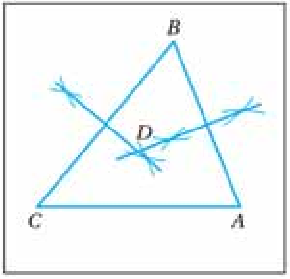


خطوة 3، استعمل الفرجار لقياس DE، ثم ثبته في النقطة D، وارسم دائرة بنصف قطر يساوي فتحة الفرجار السابقة.

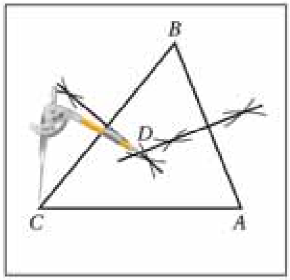


نشاط **رسم دائرة تمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.** وهذا ينطبق على إنشاء دائرة تحيط بمثلث.

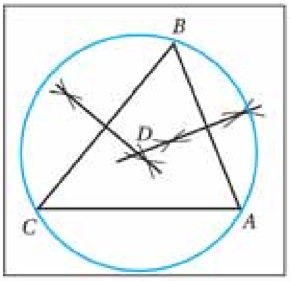
خطوة 1: ارسم مثلثًا، وسمِّ رؤوسه A, B, C. وارسم عمودين منصّفين لضلعين من أضلاع المثلث وذلك لتعيين مركز الدائرة التي تمر برؤوسه. وارمز إليه بالرمز D.



خطوة 2، استعمل الفرجار لقياس المسافة بين مركز الدائرة D التي تمر برؤوس المثلث، أو أي رأس من رؤوسه.



خطوة 3، بفتحة الفرجار نفسها في خطوة 2، ثبت الفرجار في النقطة D، ثم ارسم دائرة حول المثلث.

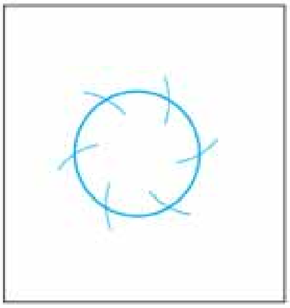


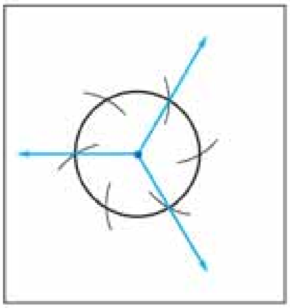
نشاط رسم مثلث متطابق الأضلاع يحيط بدائرة.

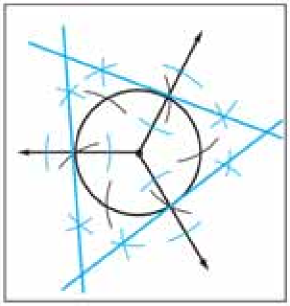
خطوة 1: ارسم دائرة وقسّمها إلى ستة أقواس متطابقة.

خطوة 2: ضع نقاطًا على الأقواس بحيث تضع نقطة على قوس وتترك الآخر، وارسم أنصاف مستقيمات من مركز الدائرة إلى كل نقطة منها.

خطوة 3: ارسم مستقيمات عمودية على كل نصف مستقيم عند تلك النقاط.







حلل النتائج

1) ارسم مثلثًا منفرج الزاوية بداخله دائرة.

2) ارسم مثلثًا قائم الزاوية تحيط به دائرة.

3) ارسم دائرة بأي قياس يحيط بها مثلث متطابق الأضلاع.

ارجع إلى نشاط 1.

4) لماذا يجب أن ترسم قطعة عمودية على ضلع واحد فقط من أضلاع المثلث؟

5) كيف يمكنك استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث لتوضيح صحة هذا الإنشاء؟

ارجع إلى نشاط 2.

6) لماذا يجب أن تقيس المسافة فقط بين مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث، وأي رأس من رؤوسه؟

7) كيف يمكنك استعمال نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث لتوضيح صحة هذا الإنشاء؟

ارجع إلى نشاط 3.

8) ما قياس كل من الأقواس الستة المتطابقة؟

9) اكتب برهانًا مقنعًا على أن المستقيمات التي قمت برسمها في خطوة 3 تشكل مثلثًا متطابق الأضلاع.

8-6 القاطع والمماسّ وقياسات الزوايا
Secant, Tangent and Angle Measures

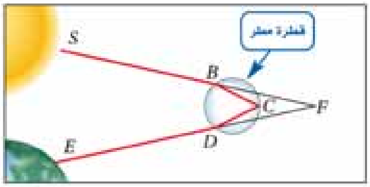
الأفكار الرئيسة:

- أجد قياسات الزوايا المتكوِّنة من تقاطع مستقيمات على دائرة أو بداخلها.
- أجد قياسات الزوايا المتكوِّنة من تقاطع مستقيمات خارج الدائرة.

المفردات:

القاطع
secant

استعد



تعمل قطرات المطر في الهواء على انكسار أشعة الشمس أو انحرافها عن مسارها عند مرورها بها. واختلاف زوايا الانكسار للأشعة يُنتج قوسًا من الألوان يسمى قوس المطر. في الشكل المجاور تدخل أشعة الشمس القادمة من النقطة S قطرة المطر عند B، فينحرف مسار الأشعة داخل قطرة المطر. والشعاع المنكسر يتقدم في مساره إلى خلف قطرة المطر، حيث يحدث له انعكاس عند النقطة C ليترك القطرة عند النقطة D ساقطًا على سطح الأرض. وتمثل الزاوية F زاوية انحراف الأشعة عن مسارها الأصلي.

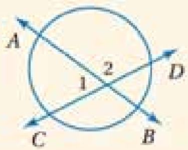
التقاطع على الدائرة أو داخلها: يسمى المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطتين **قاطعًا**. في الشكل أعلاه $\overline{SF}$ و $\overline{EF}$ قاطعان للدائرة. عندما يتقاطع قاطعان داخل دائرة، فإن الزوايا المتكونة من تقاطعهما يكون لها علاقة بالأقواس التي تقابلها.

نظرية 8.12

إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإن قياس أي من الزوايا المتكوّنة من التقاطع يساوي نصف مجموع قياسي القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.

أمثلة: $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AC} + m\widehat{BD})$

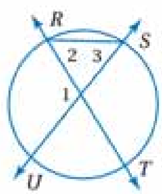
$m\angle 2 = \frac{1}{2}(m\widehat{AD} + m\widehat{BC})$



مثال — نظرية 8.12

المعطيات: $\overleftrightarrow{RT}$ و $\overleftrightarrow{SU}$ قاطعان لدائرة

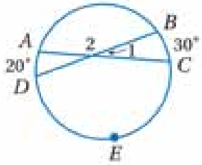
المطلوب: إثبات أن $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{ST} + m\widehat{RU})$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$	1) نظرية الزاوية الخارجة
2) $m\angle 2 = \frac{1}{2}m\widehat{ST},\ m\angle 3 = \frac{1}{2}m\widehat{RU}$	2) قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس القوس المقابل لها
3) $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\widehat{ST} + \frac{1}{2}m\widehat{RU}$	3) بالتعويض
4) $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{ST} + m\widehat{RU})$	4) خاصية التوزيع

مثال الزاوية بين قاطعين



1 إذا علمت أن $m\widehat{BC} = 30°$ و $m\widehat{AD} = 20°$، فأوجد $m\angle 2$.

الطريقة الأولى: أوجد $m\angle 1$.

$m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{BC} + m\widehat{AD})$ نظرية 8.12

$= \frac{1}{2}(30° + 20°) = 25°$ بالتعويض

$m\angle 2 = 180° - m\angle 1$

$= 180° - 25° = 155°$

الطريقة الثانية: أوجد أولًا $m\widehat{AB}$ و $m\widehat{DEC}$.

$m\angle 2 = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{DEC})$ نظرية 8.12

$= \frac{1}{2}[360° - (m\widehat{BC} + m\widehat{AD})]$ $m\widehat{AB} + m\widehat{DEC} = 360° - (m\widehat{BC} + m\widehat{AD})$

$= \frac{1}{2}[360° - (30° + 20°)]$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}(310°) = 155°$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

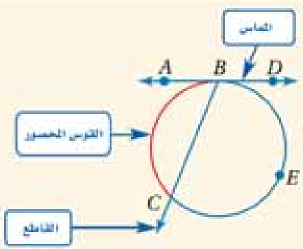
1) أوجد $m\angle 1$ في الشكل المجاور.

نظرية 8.13

إذا تقاطع قاطع ومماس عند نقطة التماس، فإن قياس كل زاوية متكوّنة من التقاطع يساوي نصف قياس القوس الذي تحصره.

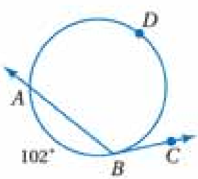
أمثلة: $m\angle ABC = \frac{1}{2}m\widehat{BC}$

$m\angle DBC = \frac{1}{2}m\widehat{BEC}$



ستبرهن نظرية 8.13 في التمرين 38.

مثال الزاوية بين المماس والقاطع

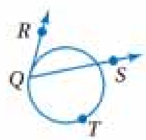


2 إذا علمت أن $m\widehat{AB} = 102°$، فأوجد $m\angle ABC$.

$m\widehat{ADB} = 360° - m\widehat{AB} = 360° - 102° = 258°$

$m\angle ABC = \frac{1}{2}m\widehat{ADC} = \frac{1}{2}(258°) = 129°$

تحقق من فهمك

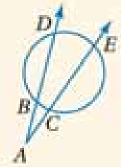
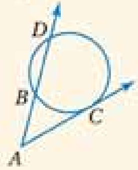
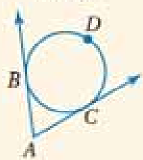


2) إذا كان $m\widehat{QTS} = 238°$، فأوجد $m\angle RQS$ مستعملًا الشكل المجاور.

التقاطع خارج الدائرة: يمكن أن يتقاطع قاطعان أو قاطع ومماس خارج الدائرة. وقياس الزاوية المتكونة يتضمن نصف قياسي القوسين المقابلين لها.

نظرية 8.14

إذا تقاطع قاطعان أو قاطع ومماس أو مماسان خارج دائرة فإن قياس الزاوية المتكونة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.

قاطعان	مماس - قاطع	مماسان
		
$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$	$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DC} - m\widehat{BC})$	$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{BDC} - m\widehat{BC})$

ستبرهن نظرية 8.14 في التمرين 37.

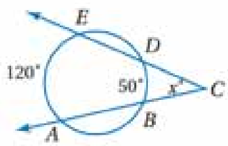
إرشادات

القيمة المطلقة

يمكن أن يُعبَّر عن قياس $\angle A$ بنصف القيمة المطلقة للفرق بين طولي القوسين، و لا يهم في هذه الطريقة ترتيب أطوال الأقواس؛ لأن الترتيب لا يؤثر في الناتج.

مثال

الزاوية بين قاطعين



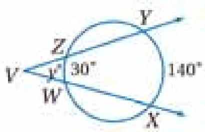
3 أوجد قيمة x، مستعملًا الشكل المجاور.

$$m\angle C = \frac{1}{2}(m\widehat{EA} - m\widehat{DB})$$

بالتعويض $\quad x = \frac{1}{2}(120° - 50°)$

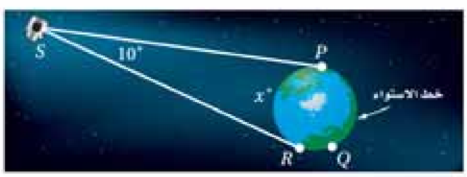
بالتبسيط $\quad x = \frac{1}{2}(70°) = 35°$

تحقق من فهمك



3) أوجد قيمة y ، مستعملًا الشكل المجاور.

مثال من واقع الحياة



4 **أقمار صناعية:** افرض أن قمرًا صناعيًّا S يدور حول الأرض، ويبدو أنه يدور فوق خط الاستواء. استعمل الشكل لتحديد قياس القوس على خط الاستواء كما يراه القمر الصناعي.

$\widehat{PR}$ يمثل القوس على خط الاستواء كما يبدو للقمر الصناعي S.

إذا كان $x = m\widehat{PR}$ ، فإن $m\widehat{PQR} = 360° - x$.

استعمل قياس الزاوية المُعطاة لإيجاد $m\widehat{PR}$.

$$m\angle S = \frac{1}{2}(m\widehat{PQR} - m\widehat{PR})$$

$$10^\circ = \frac{1}{2}[(360^\circ - x) - x]$$ بالتعويض

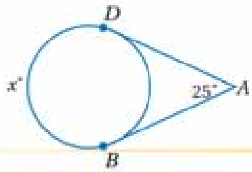
$$20^\circ = 360^\circ - 2x$$ بضرب كلا الطرفين في 2 والتبسيط

$$-340^\circ = -2x$$ طرح °360 من كلا الطرفين

$$170^\circ = x$$ قسمة كلا الطرفين على 2−

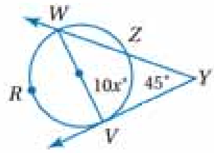
إذن، قياس القوس على الأرض كما يراه القمر الصناعي °170.

تحقق من فهمك



4) أوجد قيمة x ، مستعملًا الشكل المجاور.

مثال الزاوية بين المماس والقطر



5 أوجد قيمة x ، مستعملًا الشكل المجاور.

$\widehat{WRV}$ نصف دائرة، لأن $\overline{WV}$ قطر فيها.

إذن $m\widehat{WRV} = 180^\circ$.

$$m\angle Y = \frac{1}{2}(m\widehat{WV} - m\widehat{ZV})$$

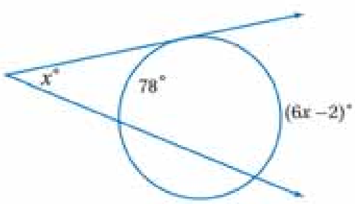
$$45^\circ = \frac{1}{2}(180^\circ - 10x)$$ بالتعويض

$$90^\circ = 180^\circ - 10x$$ بضرب كلا الطرفين في 2

$$-90^\circ = -10x$$ بطرح °180 من كلا الطرفين

$$9^\circ = x$$ بقسمة كلا الطرفين على 10−

تحقق من فهمك



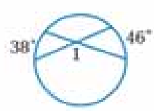
5) أوجد قيمة x ، مستعملًا الشكل المجاور.

تأكد

أوجد قياس كلٍّ مما يأتي:

المثالان 1 و 2
(ص 214)

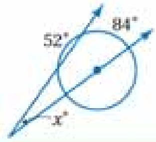
1) $m\angle 1$

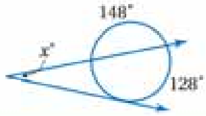


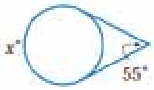
2) $m\angle 2$

الأمثلة 5-3
(ص 216-215)

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

(3


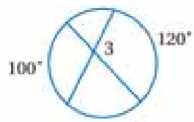
(4


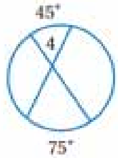
(5


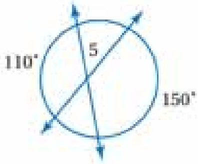
تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين	للواجب المنزلي انظر الأمثلة
6–9 , 14	1
10–13	2
15–18	3
19–20	4
21–24	5

أوجد قياس كلٍّ مما يأتي:

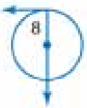
(6 $m\angle 3$


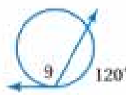
(7 $m\angle 4$


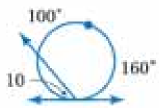
(8 $m\angle 5$


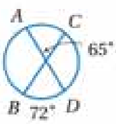
(9 $m\angle 6$


(10 $m\angle 7$


(11 $m\angle 8$


(12 $m\angle 9$


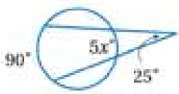
(13 $m\angle 10$


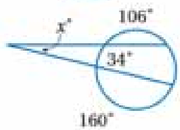
(14 $m\widehat{AC}$


أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي، مفترضًا أن أي قطعة مستقيمة تبدو كأنها مماس تكون مماسًّا فعلًا:

(15

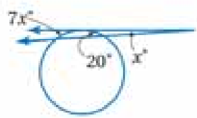

(16

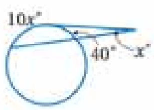

(17


(18


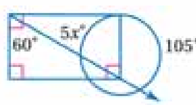
(19


(20

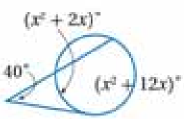

(21


(22


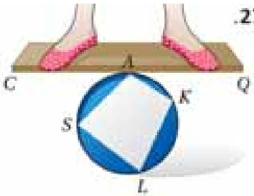
(23


(24


(25


(26


سيرك: ارجع إلى الشكل المجاور والمعلومات الآتية لحل التمارين 30-27.



يتطلب من البهلوان في السيرك المحافظة على توازنه فوق لوح موضوع على أسطوانة دائرية كما هو واضح في الشكل المجاور.

إذا علمت أن $\overline{LK} \parallel \overline{SA}$، $m\angle SLK = 78^\circ$ و $m\widehat{SA} = 46^\circ$،

فأوجد كلًّا من القياسات الآتية:

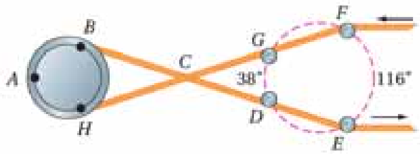
27) $m\angle CAS$

28) $m\angle QAK$

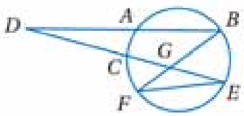
29) $m\widehat{KL}$

30) $m\widehat{SL}$

31) **حياكة النسيج:** بعد أن تتم عملية غزل الخيوط الصوفية، يتم صبغها، ثم تُمرّر على عدة بكرات لكي تجف. يُظهر الشكل أدناه إحدى مجموعات البكرات. لاحظ أن الغَزل يبدو كأنه يتقاطع بعضه مع بعض عند C، ولكنه في الواقع غير ذلك. استعمل المعلومات من الشكل لإيجاد $m\widehat{BH}$.



إذا كان $m\angle EGB = 52^\circ$, $m\widehat{AB} = 108^\circ$, $m\widehat{FE} = 118^\circ$, $m\angle EFB = 30^\circ$، فأوجد قياس كلٍّ مما يأتي:



32) $m\widehat{AC}$

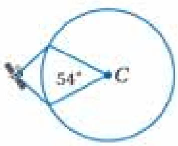
33) $m\widehat{CF}$

34) $m\angle EDB$

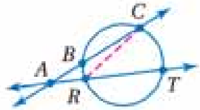
35) **اتصالات:** الإشارة التي تصدر عن برج الاتصالات تتبع في مسارها شعاعًا نقطة بدايته على البرج ويكون مماسًا لسطح الأرض، كما هو مبين في الشكل المجاور. حدد قياس القوس المحصور بالمماسين مفترضًا أن البرج يقع على مستوى سطح البحر.

ملاحظة: الرسم ليس مرسومًا بمقياس رسم

36) **أقمار صناعية:** يدور قمر صناعي في مدار، محافظًا في أثناء دورانه على ارتفاع ثابت فوق منطقة خط الاستواء. وتستطيع الكاميرا الموضوعة على القمر الصناعي رصد قوس طوله 6000 km على سطح الأرض. وقياس هذا القوس بالدرجات 54° كما في الشكل المجاور. ما قياس زاوية الرؤيا للكاميرا الموضوعة على القمر الصناعي؟



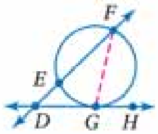
37) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 8.14، آخذًا بعين الاعتبار الحالات الآتية:



a) **حالة 1:** قاطعان

المعطيات: $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{AT}$ قاطعان للدائرة.

المطلوب: إثبات أن $m\angle CAT = \frac{1}{2}(m\widehat{CT} - m\widehat{BR})$

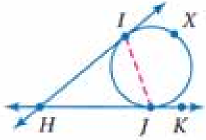


b) **حالة 2:** مماس وقاطع

المعطيات: $\overleftrightarrow{DG}$ مماس للدائرة.

$\overleftrightarrow{DF}$ قاطع لها.

المطلوب: إثبات أن $m\angle FDG = \frac{1}{2}(m\widehat{FG} - m\widehat{GE})$

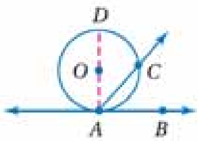


c) **حالة 3:** مماسان

المعطيات: $\overleftrightarrow{HI}$ و $\overleftrightarrow{HJ}$ مماسان للدائرة.

المطلوب: إثبات أن $m\angle IHJ = \frac{1}{2}(m\widehat{IXJ} - m\widehat{IJ})$

38) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 8.13.



a) **المعطيات:** $\overleftrightarrow{AB}$ مماس لـ $\odot O$.

$\overleftrightarrow{AC}$ قاطع لـ $\odot O$.

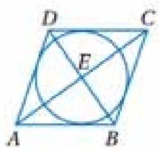
$\angle CAB$ زاوية حادّة.

المطلوب: إثبات أن $m\angle CAB = \frac{1}{2}m\widehat{CA}$

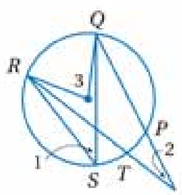
b) برهن نظرية 8.13 إذا كانت الزاوية في فرع (**a**) زاوية منفرجة.

مسائل مهارات التفكير العليا

39) **مسألة مفتوحة:** ارسم دائرة وقطرًا فيها، وليكن $\overline{AC}$. ثم ارسم مماسًّا لها عند النقطة A. ما نوع الزاوية المتكوّنة من المماس وقطر الدائرة؟ فسّر إجابتك.



40) **تحدٍّ:** الدائرة E مرسومة داخل المُعيّن $ABCD$.
طولا قطري هذا المعيّن 10 cm و 24 cm. ما طول نصف قطر الدائرة E إلى أقرب جزء من عشرة؟ (إرشاد: ارسم ارتفاعًا لأحد المثلثات من E)

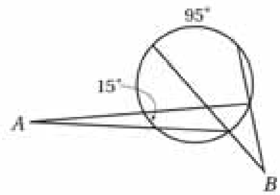


41) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور، $\angle 3$ زاوية مركزية.
رتّب قياسات الزوايا المرقّمة تنازليًّا، وبرر إجابتك.

42) **اكتب:** ارجع إلى المعلومات صفحة 213 لتوضّح كيف تجد قياس الزاوية التي تمثل انحراف الشعاع عن مساره الأصلي. وضمّن توضيحك أنواع القطع المستقيمة المُمثّلة في ذلك الشكل.

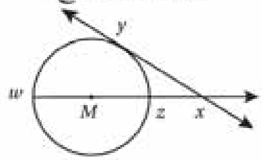
تدريب على اختبار معياري

43) ما قياس $\angle B$، إذا كان $m\angle A = 10°$؟



A $30°$
B $35°$
C $47.5°$
D $90°$

44) **مراجعة:** نصف قطر $\odot M$ في الشكل أدناه يساوي 5 cm. إذا كان $xy = 13\text{cm}$ ، ماقياس $\overline{zx}$ مقربًا إلى أقرب عدد صحيح ؟

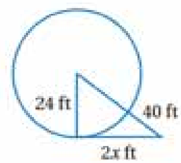


F 6 cm
G 7 cm
H 9 cm
J 12 cm

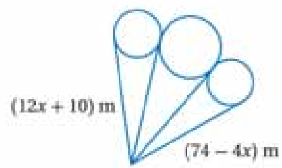
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات هي مماسات فعلًا: (الدرس 8-5)

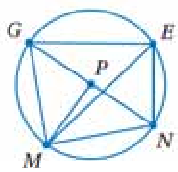
45)



46)



في $\odot P$ ، $m\widehat{EN} = 66°$ و $m\angle GPM = 89°$. أوجد قياس كلٍّ مما يأتي: (الدرس 8-4)



47) $m\angle EGN$
48) $m\angle GME$
49) $m\angle GNM$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: استعمل قانون حل المعادلة التربيعية، $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ، للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ لحل كل معادلة مما يأتي، مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة: (مهارة سابقة)

50) $x^2 + 6x - 40 = 0$
51) $2x^2 + 7x - 30 = 0$
52) $3x^2 - 24x + 45 = 0$

8-7 قطع مستقيمة خاصّة في الدائرة
Special Segments in a Circle

الأفكار الرئيسة:

- أجد أطوال القطع المستقيمة التي تتقاطع داخل الدائرة.
- أجد أطوال القطع المستقيمة التي تتقاطع خارج الدائرة.

استعد

يمثّل الشكل المجاور شعارًا لإحدى المؤسسات يتكون من دائرة رُسم فيها نجمة خماسية منتظمة، والوتران $\overline{BE}$، $\overline{DA}$ يتقاطعان في النقطة F.

قطع مستقيمة تتقاطع داخل الدائرة: تعلمت في درس 2–8 كيف تجد أطوال أجزاء وتر يتقاطع مع قطر عمودي عليه. ولكن كيف تجد أطوال أوتار متقاطعة أخرى؟

إرشادات

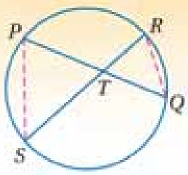
تذكر أنه إذا تطابقت زوايا مثلثين فإنهما متشابهان، ومن ثم فإن أطوال أضلاعهما المتناظرة تكون متناسبة.

معمـل الهندسة

الأوتار المتقاطعة

اعمل نموذجًا

- ارسم دائرة ووترين متقاطعين.
- سمِّ الوترين $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$ ونقطة التقاطع T.
- ارسم $\overline{PS}$ و $\overline{RQ}$.



حلل النتائج

1) سمِّ أزواجًا من الزوايا المتطابقة. وبرر إجابتك.

2) ما العلاقة بين $\triangle PTS$ و $\triangle RTQ$؟ ولماذا؟ قص المثلثين وحركهما، وتحقق من تخمينك.

3) خمّن علاقة بين $\overline{PT}$، $\overline{TQ}$، $\overline{RT}$، $\overline{ST}$.

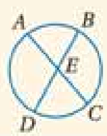
4) قس كل زاوية، وتحقق من تخمينك.

نتائج هذا المعمل تمهد لبرهان النظرية 8.15.

نظرية 8.15

إذا تقاطع وتران داخل دائرة فإن حاصل ضرب طولي جُزأي كل وتر متساويان.

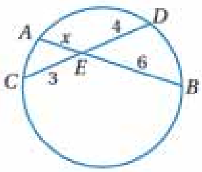
مثال: $AE \cdot EC = BE \cdot ED$



سوف تُبرهن نظرية 8.15 في تمرين 16.

مثال — تقاطع وترين

1 أوجد قيمة x مستعملًا الشكل المجاور.

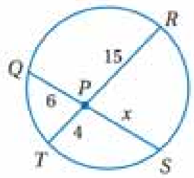


$$AE \cdot EB = CE \cdot ED$$

$x \cdot 6 = 3 \cdot 4$	بالتعويض
$6x = 12$	بالضرب
$x = 2$	بقسمة كلا الطرفين على 6

تحقق من فهمك

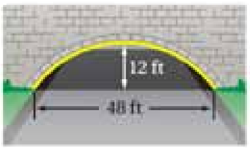
1) أوجد قيمة x مستعملًا الشكل المجاور.



يمكن استعمال الأوتار المتقاطعة أيضًا لقياس الأقواس.

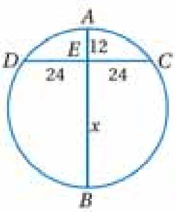
مثال من واقع الحياة

2 **أنفاق:** يتم إنشاء الأنفاق عبر الجبال لفتح طرق لعبور المركبات، ما طول نصف قطر الدائرة التي تحوي القوس إذا كانت الفتحة ليست نصف دائرة؟



ارسم نموذجًا باستعمال دائرة. ولتكن x طول جزء من القطر $\overline{AB}$ غير المعلوم.

استعمل حاصل ضرب أطوال الأوتار المتقاطعة لإيجاد طول القطر $\overline{AB}$.



$AE \cdot EB = DE \cdot EC$	حاصل ضرب جزءَي الوتر
$12x = 24 \cdot 24$	بالتعويض
$x = 48$	بقسمة كلا الطرفين على 12
$AB = AE + EB$	مسلّمة إضافة القطع المستقيمة
$AB = 12 + 48 = 60$	بالتعويض والجمع

وبما أن طول القطر يساوي 60 ft، فإن $r = 30$ ft.

تحقق من فهمك

2) **الأسترودوم:** ارتفاع أعلى نقطة في قبة الأسترودوم يساوي 208 ft، وطول قطر الدائرة التي تحوي القوس يساوي 710 ft. ما المسافة بين طرفي القوس؟

الربط مع الحياة

الأسترودوم (The Astrodome) في هيوستن هو أول ملعب للكرة بني مسقوفًا بقبة كروية الشكل.

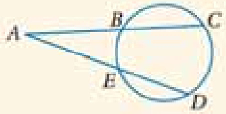
وكانت أرض الملعب في الأصل مغطاة بالعشب الطبيعي، لذلك كانت أشعة الشمس تدخل من خلال لوح زجاجي صُمم لذلك.

ولكن هذا التصميم أدى إلى صعوبة رؤية الكرة في الهواء، ولذلك تم طلاء السقف، والاستعاضة عن العشب بسجاد.

قطع مستقيمة تتقاطع خارج الدائرة: الأوتار غير المتوازية في الدائرة، وغير المتقاطعة داخلها، يمكن أن تُمد لتشكّل قواطع تتقاطع خارج الدائرة. والعلاقة الخاصة بين القواطع لا تتضمن الوتر.

نظرية 8.16

إذا رُسم قاطعان إلى دائرة من نقطة خارجها فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه.

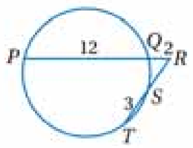


مثال: $AB \cdot AC = AE \cdot AD$

سوف تبرهن نظرية 8.16 في التمرين 25.

مثال — تقاطع قاطعين

3 إذا علمت أن $TS = 3$ ، $PQ = 12, QR = 2$. فأوجد RS، مستعملاً الشكل المجاور.

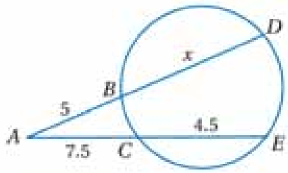


ليكن $RS = x$.

$QR \cdot PR = RS \cdot RT$	حاصل ضرب جزئي القاطع
$2 \cdot (12 + 2) = x \cdot (x + 3)$	بالتعويض
$28 = x^2 + 3x$	خاصية التوزيع
$0 = x^2 + 3x - 28$	بطرح 28 من كلا الطرفين
$0 = (x + 7)(x - 4)$	بالتحليل
$x - 4 = 0$ أو $x + 7 = 0$	
$x = 4$ أو $x = -7$	أهمل الحل السالب

تحقق من فهمك

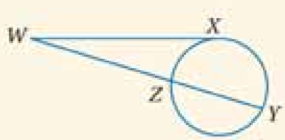
3) أوجد قيمة x، مستعملاً الشكل المجاور.



يمكن استعمال حاصل ضرب جزأي القاطع مع نظرية القاطع والمماس. وفي هذه الحالة يكون المماس هو الجزء الخارجي والكلي للقطعة نفسها. وهذا ما تنص عليه نظرية 8.17.

نظرية 8.17

إذا رسم مماس للدائرة وقاطع من نقطة خارج الدائرة فإن مربع طول المماس يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول الجزء الخارجي منه.



مثال: $WX \cdot WX = WZ \cdot WY$

سوف تبرهن نظرية 8.17 في التمرين 26.

إرشادات

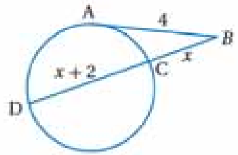
مساعدة للتذكر

لكي تتذكر هذه الفكرة أو المفهوم يمكن تبسيط نص نظرية 8.16 على النحو التالي:

يكون كل طرف في هذه المعادلة حاصل ضرب الجزء الخارجي في القطعة كاملة.

مثـال — تقاطع قاطع مع مماس

4 أوجد قيمة x مستعملًا الشكل المجاور، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات هي مماسات فعلًا.



$$(AB)^2 = BC \cdot BD$$
$$4^2 = x\,(x + x + 2)$$
$$16 = x\,(2x + 2)$$
$$16 = 2x^2 + 2x$$
$$0 = 2x^2 + 2x - 16$$
$$0 = x^2 + x - 8$$

وهذا المقدار لا يمكن تحليله، لذلك يستعمل قانون المعادلة التربيعية.

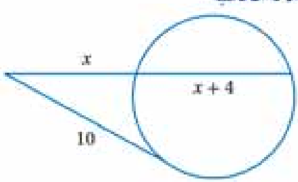
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ قانون المعادلة التربيعية

$= \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)}$ $a = 1, b = 1, c = -8$

$x = \dfrac{-1 - \sqrt{33}}{2}$ أو $x = \dfrac{-1 + \sqrt{33}}{2}$ أهمل الحل السالب

$x \approx 2.37$ باستعمال الآلة الحاسبة

تحقق من فهمك



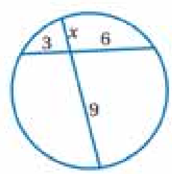
4) أوجد قيمة x، مستعملً الشكل المجاور.

تأكد

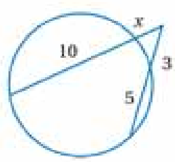
الأمثلة 4 ، 3 ، 1
(ص 224-222)

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي، مقربة إلى أقرب جزء من عشرة، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات هي مماسات فعلًا.

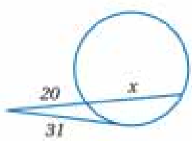
(1



(2

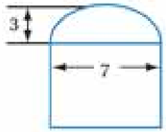


(3



مثال 2
(ص 222)

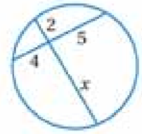
4) **تاريخ:** يوجد في البناء الروماني (coliseum) عدة مداخل على شكل باب يعلوه قنطرة، ونسبة عرض القنطرة إلى ارتفاعها 7:3. أوجد نسبة عرض القنطرة إلى طول نصف قطر الدائرة التي تحوي القنطرة.

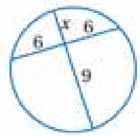


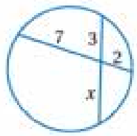
تمارين ومسائل

إرشادات للواجب المنزلي	
للتمارين	انظر الأمثلة
5–7	1
9,8	2
10–12	3
13–15	4

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي إلى أقرب جزء من عشرة، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات هي مماسات فعلًا.

5)


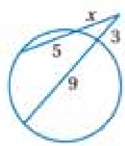
6)


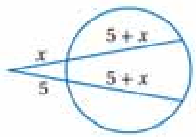
7)


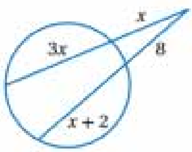
8) **مقبض الباب:** إذا فَصلْتَ مقبض باب عن القفل المثبت عليه، تلاحظ أن الفتحة ليست دائرة كاملة كما في الصورة المجاورة. افترض أن طول الحافة المستقيمة يساوي 4 mm، وأن طول العمود المار بمركز الدائرة والذي يصل بين نقطة على الدائرة والحافة المستقيمة يساوي 4.25 mm ، وأوجد طول نصف قطر الدائرة التي تحوي هذه الفتحة .

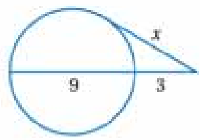
9) **هندسة معمارية:** قنطرة تعلو باب منزل، ارتفاعها يساوي 60 cm، وعرضها يساوي 200 cm، كما في الشكل المجاور. أوجد طول نصف قطر الدائرة التي تحوي القنطرة.

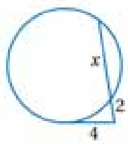
أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي، إلى أقرب جزء من عشرة، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات هي مماسات فعلًا.

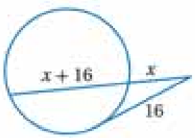
10)


11)


12)


13)


14)


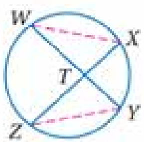
15)


الربط مع الحياة

عامل بناء

يجب أن يعرف عمّال البناء كيفية قياس الأشكال ليتمكنوا من بناء المنازل بطريقة متناسقة. ويعرفوا كيفية استعمال المعدات لقطع الأخشاب والحديد وفق قياسات محددة على أساس هندسي.

16) **برهان:** انقل برهان نظرية 8.15 وأكمله.

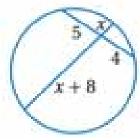


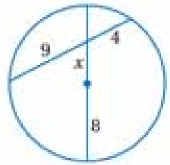
المعطيات: $\overline{WY}$ و $\overline{ZX}$ تتقاطعان في T.

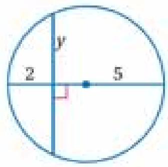
المطلوب: إثبات أن $WT \cdot TY = ZT \cdot TX$

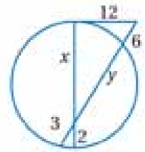
العبارات	المبررات
a) $\overline{WY}$ و $\overline{ZX}$ متقاطعان في T	a) من المعطيات
b) $\angle X \cong \angle Y$ و $\angle W \cong \angle Z$	b) ___؟
c) ___؟	c) التشابه بـ AA
d) $\frac{WT}{ZT} = \frac{TX}{TY}$	d) ___؟
e) ___؟	e) الضرب التبادلي

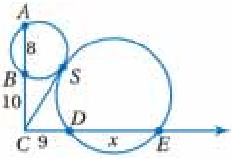
أوجد قيمة كلِّ متغير مما يأتي إلى أقرب جزء من عشرة:

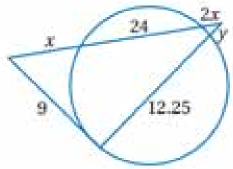
17) 

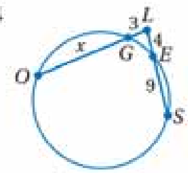
18) 

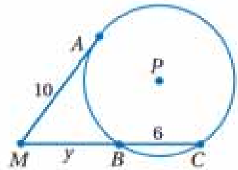
19) 

20) 

21) 

22) 

23) 

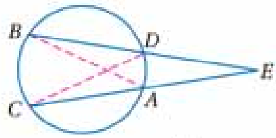
24) 

مسائل مهارات التفكير العليا

25) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 8.16.

المعطيات: EC و EB قاطعان

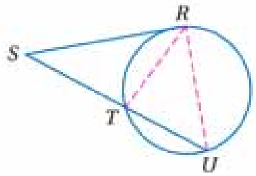
المطلوب: إثبات أن $EA \cdot EC = ED \cdot EB$



26) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لنظرية 8.17.

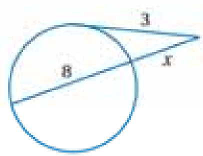
المعطيات: $\overline{SR}$ مماس، $\overline{SU}$ قاطع

المطلوب: إثبات أن $(SR)^2 = ST \cdot SU$.



27) **تبرير:** اشرح كيف يتشابه حاصل ضرب طولي جزأيْ قاطعين مع حاصل ضرب طول مماس وجزءيْ قاطع.

28) **اكتشف الخطأ:** كتب كل من نبيل وعامر حاصل ضرب لإيجاد قيمة x، في الشكل أدناه، أيهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.



نبيل

$3^2 = x \cdot 8$

$9 = 8x$

$\frac{9}{8} = x$

عامر

$3^2 = x(x + 8)$

$9 = x^2 + 8x$

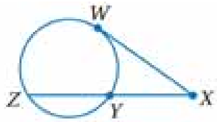
$0 = x^2 + 8x - 9$

$0 = (x + 9)(x - 1)$

$x = 1$

29) **مسألة مفتوحة:** ارسم دائرة وقاطعين ومماسًّا، بحيث تتقاطع في النقطة نفسها. وأعطِ مثالًا من واقع الحياة ليكون نموذجًا لهذا الرسم.

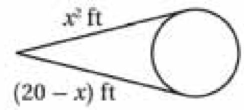
30) **تحدَّ** في الشكل المجاور، Y نقطة منتصف $\overline{XZ}$.
أوجد WX. ووضّح كيف عرفت ذلك.



31) **اكتب:** استعمل شكل الشعار في صفحة 221 لتفسير العلاقة بين أطوال الأوتار المتقاطعة. صِفِ القطع المتكونة من تقاطع الوترين $\overline{AD}$ و $\overline{EB}$، والعلاقة بينها.

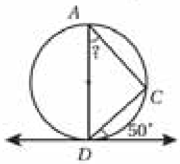
تدريب على اختبار معياري

32) أيّ القيمتين محتملتان للمجهول x، بناءً على المعلومات المعطاة في الشكل المجاور:



A $-5, -4$　　**C** $5, 4$
B $5, -4$　　**D** $-5, 4$

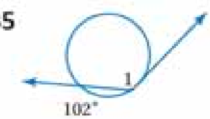
33) **مراجعة:** ماقياس $\angle A$، في الشكل أدناه إذا علمت أن $\overline{AD}$ قطر؟

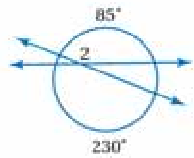


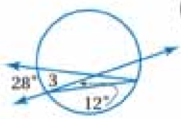
F $25°$　　**H** $40°$
G $35°$　　**J** $50°$

مراجعة تراكمية

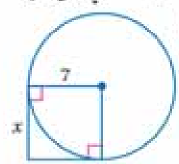
أوجد قياس كل زاوية من الزوايا المرقمة في كلٍّ من الأشكال الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات هي مماسات فعلًا: (الدرس 8-6)

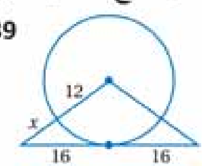
34)


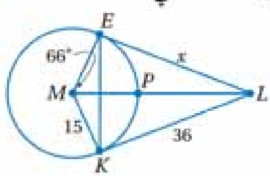
35)


36)


أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات هي مماسات فعلًا: (الدرس 8-2)

37)


38)


39)


استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: أوجد المسافة بين كل نقطتين من النقاط الآتية: (مهارة سابقة)

40) $C(-2, 7), D(10, 12)$　　41) $E(1, 7), F(3, 4)$　　42) $G(9, -4), H(15, -2)$

8-8 معادلة الدائرة
Equation of a Circle

الأفكار الرئيسة:
- أكتب معادلة الدائرة.
- أرسم دائرة على المستوى الإحداثي.

استعد

عندما يُرمى حجر في الماء فإن الأمواج المتكوّنة تتحرك مبتعدة عن المركز مكوّنة دوائر متّحدة المركز. وإذا أعطي موقع الحجر إحداثيين، فإن كل موجة يمكن أن تُمثل بمعادلة دائرة.

معادلة الدائرة إن الدائرة هي المحل الهندسي لنقاط في مستوى تبعد مسافات متساوية عن نقطة معطاة، وهو يُعيّن معادلة أي دائرة.
افترض أن مركز الدائرة هو $(3, 2)$، وطول نصف قطرها 4.
طول نصف القطر هو المسافة بين المركز وأي نقطة على الدائرة.

افترض أن النقطة $P(x, y)$ هي نهاية أي نصف قطر، فتكون

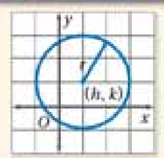
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	قانون المسافة
$4 = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$	$d = 4, (x_1, y_1) = (3, 2)$
$16 = (x-3)^2 + (y-2)^2$	بتربيع كلا الطرفين

طبّق هذه الطريقة نفسها على دائرة مركزها (h, k) غير معلوم، وطول نصف قطرها r، فتنتج الصورة العامة لمعادلة أي دا ئرة.

مفهوم أساسي — **الصورة القياسية لمعادلة الدائرة**

معادلة الدائرة التي مركزها (h, k)
وطول نصف قطرها r وحدة هي :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



مثال — معادلة الدائرة

1 اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-2, 4)$، $d = 4$، حيث d طول القطر.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$[x - (-2)]^2 + [y - 4]^2 = 2^2$	$(h, k) = (-2, 4)$، إذا كان $d = 4$، فإن $r = 2$
$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$	بالتبسيط

تحقق من فهمك

اكتب معادلة كل من الدائرتين الآتيين:

1A) مركزها $(3, -2)$، $d = 10$ **1B)** مركزها نقطة الأصل، $r = 6$

إرشادات

معادلة الدائرة

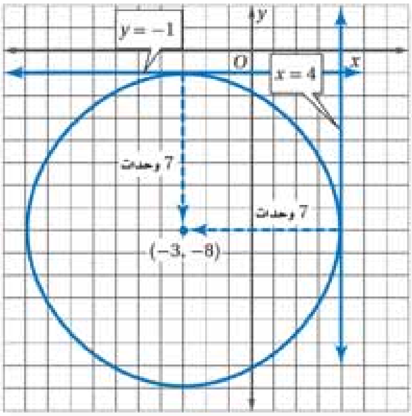
لاحظ أن معادلة الدائرة بقيت كما هي في الشكل أعلاه.

وليس بالضرورة فك التربيع.

ويمكن استعمال معلومات أخرى عن الدائرة لإيجاد معادلتها.

مثال استعمال خصائص الدوائر

2 دائرة طول قطرها 14، ومركزها يقع في الربع الثالث من المستوى الإحداثي، والمستقيمان $y = -1$ و $x = 4$ مماسان لها. اكتب معادلة الدائرة.



ارسم المماسين.

بما أن $d = 14$ ، فإن $r = 7$. والمستقيم $x = 4$ عمودي على نصف قطر. وبما أن $x = 4$ خط رأسي فإن نصف القطر يقع على الخط الأفقي.

عدّ 7 وحدات إلى اليسار من $x = 4$.

وأوجد قيمة h.

$h = 4 - 7 = -3$

وبالطريقة نفسها، نصف القطر العمودي على الخط $y = -1$ يقع على خط رأسي.

قيمة k تساوي 7 وحدات للأسفل من -1.

$k = -1 - 7 = -8$

إذن، فالمركز $(-3, -8)$ وطول نصف القطر يساوي 7. فمعادلة الدائرة هي:

$(x + 3)^2 + (y + 8)^2 = 49$

تحقق من فهمك

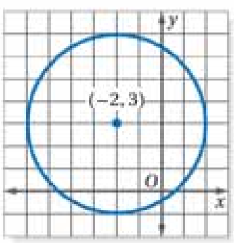
2) اكتب معادلة دائرة مركزها $(5, 4)$، ونقطة نهاية نصف قطر فيها هي $(-3, 4)$.

رسم دائرة في المستوى الإحداثي: يمكنك تحليل معادلة الدائرة لإيجاد معلومات تساعدك على رسم الدائرة في المستوى الإحداثي.

مثال رسم دائرة

3 ارسم الدائرة $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

قارن كل مقدار جبري في المعادلة بنظيره في الصورة القياسية.



$x - h = x + 2$ $y - k = y - 3$

$-h = 2$ $-k = -3$

$h = -2$ $k = 3$

$r^2 = 16$ ومنها $r = 4$.

إذن، فمركز الدائرة $(-2, 3)$ ، وطول نصف قطرها 4.

عيّن المركز واستعمل الفرجار بفتحة مقدارها 4 وحدات من المربعات الصغيرة، وارسم الدائرة.

تحقق من فهمك

ارسم كلًا من الدائرتين الآتيتين:

3A) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ **3B)** $x^2 + y^2 = 25$

إرشادات

الحاسبة البيانية

مثال 1 لاستعمال المركز وطول نصف القطر في رسم دائرة، اختر النافذة المناسبة التي تحتوي على مركز الدائرة.

اضغط ZOOM . ثم استعمل : Circle على قائمة Draw اكتب إحداثيي المركز وطول نصف القطر وسيظهر على الشاشة

Circle (−2, 3, 4)

اضغط ENTER . ويمكنك استعمال أي حاسبة بيانية أخرى.

إذا علمت ثلاث نقاط على الدائرة فإنه يمكنك إيجاد مركزها، طول نصف قطرها، وكتابة معادلتها.

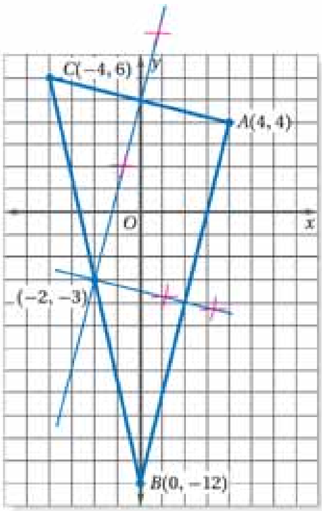
مثال من واقع الحياة

4 هاتف نقال: **تعمل الهواتف النقالة عن طريق تحويل الإشارات الهاتفية من برج إلى آخر بوساطة الأقمار الصناعية. والشركات المعنية بالهواتف النقالة تحاول وضع الأبراج بشكل يخدم عدة تجمعات. افترض أن ثلاث مدن كبيرة تقع على دائرة واحدة رُمز إليها بالنقاط $A(4, 4), B(0, -12), C(-4, 6)$. عيّن موقع البرج الذي يبعد مسافات متساوية عن هذه المدن، واكتب معادلة الدائرة.**

(إرشاد : كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل 100 ميل) .

استكشف أعطيتُ ثلاث نقاط تقع على دائرة.

خطط ارسم $\triangle ABC$، وأنشئ عمودين منصّفين لضلعين من أضلاعه لتحديد مركز الدائرة، والذي يمثل موقع البرج، ثم أوجد طول نصف القطر، واستعمل المركز ونصف القطر لكتابة معادلة الدائرة.



حل ارسم $\triangle ABC$ وارسم عمودين منصّفين لضلعين من أضلاع المثلث. فيكون المركز عند النقطة $(-2, -3)$. وهو موقع البرج.

أوجد r باستعمال قانون المسافة بين المركز وأيٍّ من النقاط الثلاث.

$$r = \sqrt{[-2 - 4]^2 + [-3 - 4]^2}$$
$$= \sqrt{85}$$

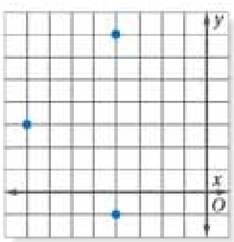
اكتب معادلة الدائرة:

$$[x - (-2)]^2 + [y - (-3)]^2 = (\sqrt{85})^2$$
$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 85$$

تحقق يمكن التحقق من طول نصف القطر بإيجاد المسافة بين المركز وأي نقطة أخرى من النقاط الثلاث.

تحقق من فهمك

4) وضعت ثلاث صفّارات إنذار على دائرة في ثلاثة مواقع استراتيجية في بلدة ما لكي يتمكن الناس جميعًا من سماع هذه الصفّارات عند حدوث أيّ طارئ كما في الشكل المجاور. اكتب معادلة الدائرة التي وضعت عليها الصفّارات الثلاث.



إرشادات

المحل الهندسي

مركز الدائرة هو المحل الهندسي لنقطة تبعد مسافات متساوية عن النقاط الثلاث المعطاة. وهذا يسمى محلًا هندسيًا مركبًا؛ لأن النقطة تحقق أكثر من شرط.

تأكد

مثال 1 (ص 228)

1) **الطقس:** يراقب علماء الفلك عاصفة جوية باستعمال رادار (Doppler). وتستعمل شبكة إحداثيات لقياس المسافات مع تقدم العاصفة. إذا كان مركز شاشة الرادار نقطة الأصل، وتبعد الحلقة الأولى عشرة أميال عن المركز، والبعد بين كل حلقتين متتاليتين عشرة أميال أيضًا، كما في الصورة المجاورة، فما معادلة الحلقة الرابعة؟

مثال 2 (ص 229)

اكتب معادلة كل دائرة في الحالات الآتية:

2) مركزها $(-3, 5)$، $r = 10$

3) مركزها نقطة الأصل، $r = \sqrt{7}$.

4) نهايتا قطر فيها $(2, 7)$ و $(-6, 15)$

5) نهايتا قطر فيها $(-7, -2)$ و $(-15, 6)$

مثال 3 (ص 229)

ارسم كل معادلة من المعادلات الآتية:

6) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 9$

7) $(x - 3)^2 + y^2 = 16$

مثال 4 (ص 230)

8) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط الثلاث $N(2, -2)$، $M(-2, -2)$، $Q(2, 2)$، ثم ارسم الدائرة.

تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين	للواجب المنزلي انظر الأمثلة
9–12	1
13–16	2
17–22	3
23،24	4

اكتب معادلة كل دائرة في الحالات الآتية:

9) مركزها نقطة الأصل، $r = 3$

10) مركزها $(-2, -8)$، $r = 5$

11) مركزها $(1, -4)$، $r = \sqrt{17}$

12) مركزها $(0, 0)$، $d = 12$

13) دائرة مركزها $(-3, 6)$ وطرف نصف قطر فيها عند النقطة $(0, 6)$.

14) دائرة طرفا قطر فيها هما النقطتان $(2, 2)$ و $(-2, 2)$

15) دائرة فيها $d = 12$ ويقع مركزها على بعد 18 وحدة عن يسار نقطة الأصل و 7 وحدات أسفلها.

16) دائرة مركزها في الربع الأول من المستوى الإحداثي. وطول نصف قطرها 5 وحدات، والمستقيمان $x = 2$ و $y = 3$ مماسان لها.

ارسم كل معادلة من المعادلات الآتية:

17) $x^2 + y^2 = 25$

18) $x^2 + y^2 = 36$

19) $x^2 + y^2 - 1 = 0$

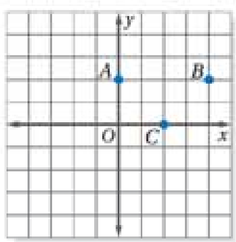
20) $x^2 + y^2 - 49 = 0$

21) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$

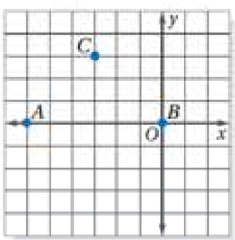
22) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

اكتب معادلة الدائرة التي تحوي مجموعة النقاط الظاهرة في الرسم، ثم انقل الرسم إلى دفترك وأكمله.

23)



24)



25) أوجد طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$ وتمر بالنقطة $(2, 5)$.

26) أوجد طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها $(x-5)^2+(y-3)^2=r^2$ وتمر بالنقطة $(5, 1)$.

نماذج الصواريخ: استعمل المعلومات الآتية لحل التمارين 29–27.

تقوم محركات ذات قوى مختلفة بإطلاق الصواريخ إلى ارتفاعات مختلفة. وكلما زاد ارتفاع الصاروخ إلى أعلى اتسعت دائرة موقع الهبوط المحتمل. بفرض أن سرعة الرياح عادية ولا تؤثر في موقع هبوط الصاروخ، وأن طول نصف قطر دائرة الهبوط يساوي ثلاثة أمثال الارتفاع الذي وصل إليه الصاروخ.

27) اكتب معادلة دائرة هبوط صاروخ قطع مسافة 300 قدم في الهواء.

28) ما نوع الدوائر المتكوّنة في مناطق الهبوط لمحركات تطلق الصاروخ إلى ارتفاعات مختلفة؟

29) ما طول نصف قطر دائرة الهبوط لصاروخ قطع مسافة 1000 قدم في الهواء؟

30) دائرة معادلتها $(x-6)^2+(y+2)^2=36$. هل المستقيم $y=2x-2$ قاطع، أو مماس، أو غير ذلك بالنسبة للدائرة؟ وضّح إجابتك.

31) دائرة معادلتها $x^2-4x+y^2+8y=16$. أوجد مركز الدائرة ونصف قطرها.

الربط مع الحياة

صمم برنامج أبولو بحيث تتم عملية الهبوط على سطح القمر بنجاح. وفي 20 يوليو 1969م هبط الإنسان لأول مرة على سطح القمر. وقد بلغ عدد مرات هبوط الإنسان على سطح القمر خلال الفترة 1972–1969 ست مرات.

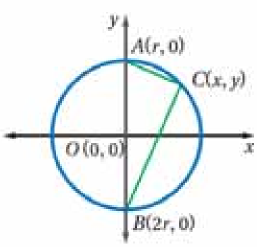
32) **طقس:** يقع رادار للطقس في النقطة $(-58, 55)$ وتقع مدينة H في نقطة الأصل. إذا كان الرادار يغطي منطقة دائرية نصف قطرها 80 وحدة طول، فاكتب معادلة تلك الدائرة، وهل مدينة H مشمولة بتأثير ذلك الرادار؟

33) **رحلة فضاء:** مركبة الفضاء أبولو 8 أول مركبة فضائية حملت إنسانًا إلى مدار حول القمر، وحلقت بمدار دائري بمتوسط ارتفاع 185 km فوق سطح القمر. فإذا علمت أن طول نصف قطر القمر يساوي 1740 km. اكتب معادلة المدار الدائري الذي سلكته مركبة الفضاء معتبرًا أن مركز القمر هو نقطة الأصل.

مسائل مهارات التفكير العليا

34) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا منفرج الزاوية في المستوى الإحداثي، ثم ارسم دائرة تحيط به.

35) **تحدٍّ:** اكتب برهانًا إحداثيًّا، لإثبات أنه إذا قابلت زاوية محيطية قطر الدائرة فإن هذه الزاوية تكون قائمة، مستعملًا الشكل المجاور.



36) **تبرير:** وضح كيف يؤدي تعريف الدائرة إلى معادلتها.

37) **اكتب:** ارجع إلى المعلومات الواردة في صفحة 228، لوصف أنواع المعادلات التي استعملت في وصف الأمواج المتكوّنة، مضمنًا إجابتك المعادلة العامة للدائرة، ثم اكتب معادلات خمس أمواج إذا كانت كل موجة تبعد عن سابقتها بمقدار 3 بوصات.

تدريب على اختبار معياري

38) أي المعادلات الآتية تمثل دائرة مركزها $(-2, 7)$، وطول قطرها 18؟

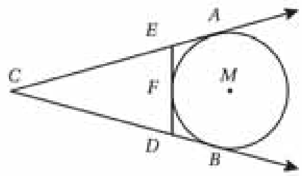
A $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 53 = 324$

B $x^2 + y^2 + 4x - 14y + 53 = 81$

C $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 53 = 18$

D $x^2 + y^2 + 4x - 14y + 53 = 3$

39) **مراجعة:** في $\odot M$، $\overline{DE}$، $\overrightarrow{CA}$، $\overrightarrow{CB}$ مماسات لها كما في الشكل أدناه.



إذا كان $CB = 6\ cm$ فإن محيط $\triangle CED$ يساوي:

F $12\ cm$

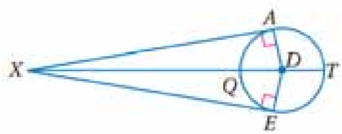
G $14\ cm$

H $16\ cm$

J $18\ cm$

مراجعة تراكمية

إذا كان $EX = 24$ و $DE = 7$، كما في الشكل المجاور، فأوجد قياس كل مما يأتي: (الدرس 8-7)



40) AX

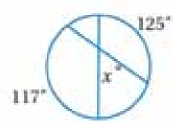
41) DX

42) QX

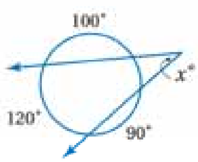
43) TX

أوجد قيمة x في كل مما يأتي: (الدرس 8-6)

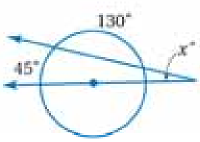
44)



45)



46)

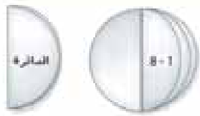


الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة

المَطْويّاتُ مُنظّم أفكار

استعد

تأكد أنك دونت المفاهيم الأساسية في مطويتك.



مفاهيم أساسيّة

الدائرة ومحيطها (الدرس 8-1)

- محيط الدائرة: $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$

الزوايا والأقواس والأوتار والزوايا المحيطية

(الدروس 8-2 إلى 8-4)

- مجموع قياسات الزوايا المركزية التي تغطي الدائرة ولا تشترك في نقاط داخلية في الدائرة يساوي $360°$. وقياس القوس يساوي قياس زاويته المركزية.
- طول القوس يتناسب مع محيط الدائرة.
- قطر الدائرة العمودي على وتر فيها ينصّفه وينصّف القوسين المقابلين لهذا الوتر.
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس الذي يقابله.

المماس والقاطع وقياس الزاوية (الدرسان 8-5 ، 8-6)

- مماس الدائرة مستقيم يقطعها في نقطة واحدة فقط، ويكون عموديًّا على نصف القطر المار بنقطة التماس.
- المماسان المرسومان من نقطة خارج دائرة متطابقان.
- قياس الزاوية المتكوّنة من تلاقي قاطعين خارج الدائرة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.
- قياس الزاوية المتكوّنة من قاطع ومماس يساوي نصف قياس القوس المقابل لهذه الزاوية.

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة ومعادلة الدائرة

(الدرسان 8-7 و 8-8)

- يمكن إيجاد أطوال الأوتار المتقاطعة في الدائرة باستعمال ناتج ضرب أطوال أجزاء هذه الأوتار.
- معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) وطول نصف قطرها r هي:
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

المفردات الأساسية

الدائرة (ص 168)	القوس الأكبر (ص 178)
المركز (ص 168)	نصف دائرة (ص 178)
الوتر (ص 168)	دائرة محيطة (ص 185)
نصف القطر (ص 168)	مضلع محصور داخل دائرة (ص 185)
القطر (ص 168)	مقابل (ص 192)
محيط الدائرة (ص 170)	مماس (ص 202)
باي (π) (ص 170)	نقطة التماس (ص 202)
الزاوية المركزية (ص 177)	القاطع (ص 213)
القوس (ص 178)	
القوس الأصغر (ص 178)	

اختبر مفرداتك

اختر المفردة من القائمة أعلاه التي تتفق مع العبارة فيما يأتي:

1) المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة واحدة فقط.
2) المضلّع الذي تقع جميع رؤوسه على الدائرة.
3) الزاوية التي يقع رأسها في مركز الدائرة.
4) القطعة التي يقع طرفاها على الدائرة.
5) المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطتين بالضبط.
6) طول خط الدائرة.
7) الوتر المار بمركز الدائرة.
8) العدد غير النسبي الذي يمثل $\frac{C}{d}$ أو $\frac{\text{المحيط}}{\text{القطر}}$.
9) القوس الذي طوله يزيد على $180°$.
10) نقطة تقاطع الدائرة مع المماس.
11) المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى التي تبعد أبعادًا متساوية عن نقطة معطاة.
12) القسمان اللذان تقسم الزاوية المركزية الدائرة إليهما.

مراجعة الدروس

8-1 الدائرة ومحيطها (الصفحات 175–168)

إذا أعطيت أحد قياسات الدائرة؛ كنصف القطر، أو القطر أو المحيط، فأوجد القياسات المجهولة مقربًا إلى أقرب جزء من مائة كلما لزم ذلك؟

13) $d = 15\,\text{in}, r = \underline{?}, C = \underline{?}$.

14) $C = 68\,\text{yd}, d = \underline{?}, r = \underline{?}$

15) $r = 11\,\text{mm}, C = \underline{?}, d = \underline{?}$

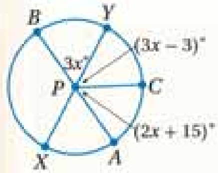
16) **دراجة هوائية:** إذا كان محيط عجلة دراجة هوائية يساوي 81.7 in، فكم يكون طول أحد دعامات العجلة؟

مثال (1): إذا علمت أن محيط دائرة $C = 76.2$ ft، فأوجد قيمة r إلى أقرب جزء من مائة.

$C = 2\pi r$	قانون محيط الدائرة
$76.2 = 2\pi r$	بالتعويض
$\frac{76.2}{2\pi} = r$	بقسمة كلا الطرفين على 2π
$12.13 \approx r$	باستعمال الآلة الحاسبة

8-2 قياس الزوايا والأقواس (الصفحات 183–177)

أوجد قياس كل مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور:



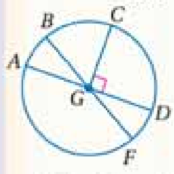
17) $m\widehat{YC}$

18) $m\widehat{BC}$

19) $m\widehat{BX}$

20) $m\widehat{BCA}$

في $\odot G$، $m\angle AGB = 30°$ و $\overline{CG} \perp \overline{GD}$. أوجد قياس كل مما يأتي، مستعملًا الشكل المجاور:



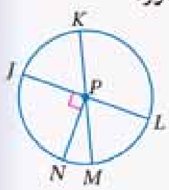
21) $m\widehat{AB}$ 22) $m\widehat{BC}$

23) $m\widehat{FD}$ 24) $m\widehat{CDF}$

25) $m\widehat{BCD}$ 26) $m\widehat{FAB}$

27) **ساعة حائط:** إذا كان طول قطر ساعة حائط دائرية الشكل يساوي 6 بوصات، فما المسافة المقيسة على حافة الساعة بين مؤشر الدقائق ومؤشر الساعات عند تمام الساعة 5:00؟

مثال (2): في $\odot P$، $m\angle MPL = 65°$، $\overline{NP} \perp \overline{PL}$، مستعملًا الشكل المجاور.



a) أوجد $m\widehat{NM}$

$\widehat{NM}$ هو القوس الأصغر.
فإن $m\widehat{NM} = m\angle NPM$
وبما أن $\angle JPN$ زاوية قائمة
و $m\angle MPL = 65°$
فإن $m\angle NPM = 25°$.
إذن، $m\widehat{NM} = 25°$

b) أوجد $m\widehat{NJK}$.

بما أن $\widehat{NJK}$ يتكوّن من قوسين متجاورين $\widehat{NJ}$ و $\widehat{JK}$ و $\angle MPL \cong \angle JPK$ فإن $m\angle JPK = 65°$.

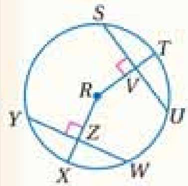
$m\widehat{NJ} = m\angle NPJ = 90°$	$\angle NPJ$ زاوية قائمة
$m\widehat{NJK} = m\widehat{NJ} + m\widehat{JK}$	مسلمة جمع الأقواس
$m\widehat{NJK} = 90° + 65° = 155°$	بالتعويض

الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة

8-3 الأقواس والأوتار (الصفحات 184-191)

في $\odot R$, $SU = 20$, $YW = 20$, و $m\widehat{YX} = 45°$.

أوجد قياس كل مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور:



28) SV

29) WZ

30) UV

31) $m\widehat{YW}$

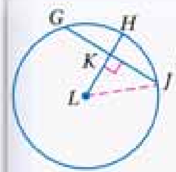
32) $m\widehat{ST}$

33) $m\widehat{SU}$

34) **فن:** رأى الفنان ليوناردو دي فينشي أن التناسب المثالي لأجزاء جسم الإنسان له علاقة بشكلين هندسيين هما الدائرة والمربع. فالدائرة المحصورة داخل مربع، والمربع المحصور داخل دائرة يستعملان كثيراً لدى الفنانين والمهندسين المعماريين والمصممين.

أوجد قياس كل قوس لدائرة تحيط بمربع.

مثال (3): إذا كان طول نصف قطر الدائرة L يساوي 32 كما بالشكل المجاور، وكان $GJ = 40$. فأوجد LK.



ارسم نصف القطر $\overline{LJ}$

فيكون $LJ = 32$ والمثلث LKJ قائم الزاوية.

وبما أن $\overline{LH} \perp \overline{GJ}$، $\overline{LH}$ تُنصف $\overline{GJ}$، فإن

$KJ = \frac{1}{2}(GJ)$ تعريف منصف القطعة المستقيمة

$= \frac{1}{2}(40) = 20$ $GJ = 40$

استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد LK.

$(LK)^2 + (KJ)^2 = (LJ)^2$ نظرية فيثاغورس

$(LK)^2 + 20^2 = 32^2$ $KJ = 20, LJ = 32$

$(LK)^2 + 400 = 1024$ بالتبسيط

$(LK)^2 = 624$ بالطرح

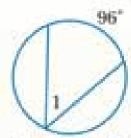
$LK = \sqrt{624}$

≈ 24.98

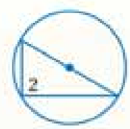
8-4 الزوايا المحيطية (الصفحات 192-200)

أوجد قياس كل زاوية مرقمة في الشكلين الآتيين:

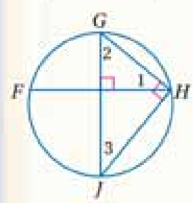
35)



36)



أوجد قياس كل زاوية مرقمة في كل حالة من الحالات الآتية:



37) $m\widehat{GH} = 78°$

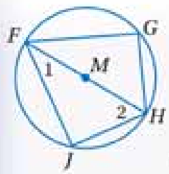
38) $m\angle 2 = 2x°, m\angle 3 = x°$

39) $m\widehat{JH} = 114°$

40) **تزلج على الجليد:** يتزلج أحمد على حلبة دائرية الشكل من الجليد، سالكًا مسار الشكل الرباعي $ABCD$ المحصور داخل دائرة. فإذا كان $m\angle A = 120°$، $m\angle B = 66°$، أوجد $m\angle C$ و $m\angle D$.

مثال (4):

المثلثان FGH و FHJ محصوران داخل $\odot M$، بحيث $\overline{FG} \cong \overline{FJ}$ فإذا كان $m\angle 1 = 6x - 5$ و $m\angle 2 = 7x + 4$. فأوجد قيمة x مستعملًا الشكل المجاور.



$\angle FJH$ زاوية قائمة لأن $\widehat{FJH}$ نصف دائرة.

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle FJH = 180°$ نظرية مجموع زوايا مثلث

$(6x - 5) + (7x + 4) + 90 = 180$ بالتعويض

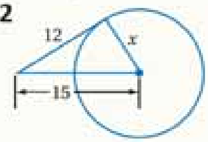
$13x + 89 = 180$ بالتبسيط

$x = 7$ الحل لإيجاد x

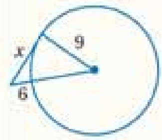
8-5 المماسات (الصفحات 202–210)

أوجد x في كلٍ مما يأتي، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات هي مماسات فعلًا:

41)

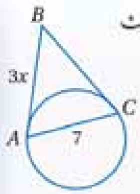


42)



43) **رشاش الماء:** رشاش ماء لري أرض عشبية دائرية الشكل محاطة بسياج على شكل مربع. إذا كانت المسافة التي يرويها الرشاش تمتد إلى 25 قدمًا، فما طول السياج المحيط بهذه الأرض؟

مثال (5): إذا علمت أن محيط المثلث ABC يساوي 25، فأوجد قيمة x مستعملًا الشكل المجاور. مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات هي مماسات فعلًا.



في الشكل $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ مماسان للدائرة. إذن، $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

محيط المثلث ABC يساوي 25.

$AB + BC + AC = 25$ تعريف محيط المثلث

$3x + 3x + 7 = 25$ $AB = BC = 3x, AC = 7$

$6x + 7 = 25$ بالتبسيط

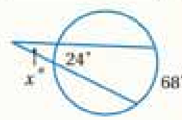
$6x = 18$ بطرح 7 من كلا الطرفين

$x = 3$ بقسمة كلا الطرفين على 6

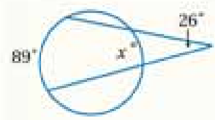
8-6 القاطع والمماس وقياسات الزوايا (الصفحات 213–220)

أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

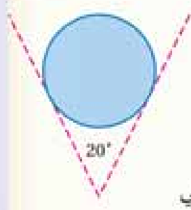
44)



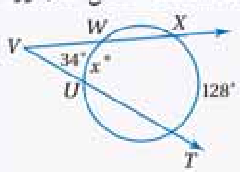
45)



46) **مجوهرات:** تضع سلوى حول عنقها سلسلة فيها قلادة دائرية، والسلسلة تمس القلادة وتصنع زاوية قياسها 20° أسفل القلادة. أوجد طول القوس السفلي للقلادة.



مثال (6): أوجد قيمة x مستعملًا الشكل المجاور.



$m\angle V = \frac{1}{2}(m\widehat{XT} - m\widehat{WU})$

$34 = \frac{1}{2}(128 - x)$ بالتعويض

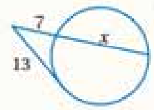
$-30 = -\frac{1}{2}x$ بالتبسيط

$x = 60$ بضرب كلا الطرفين في −2

دليل الدراسة والمراجعة

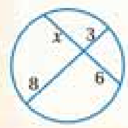
8-7 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة (الصفحات 227–221)

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي إلى أقرب جزء من عشرة. افترض أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات هي مماسات فعلًا:

47) 

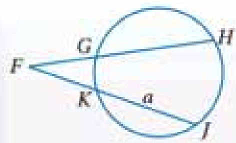
48) 

49) **غطاء المصباح الكهربائي:** الجزء العلوي للغطاء عبارة عن دائرة تحوي وترين متقاطعين. استعمل الشكل المجاور لإيجاد قيمة x.



مثال (7): إذا علمت أن $FG = 18, GH = 42$ و $FK = 15$. فأوجد قيمة a مستعملًا الشكل المجاور.

افرض أن $KJ = a$.



$FK \cdot FJ = FG \cdot FH$	حاصل ضرب جزأي القاطع
$15(a + 15) = 18(18 + 42)$	بالتعويض
$15a + 225 = 1080$	خاصية التوزيع
$15a = 855$	بالطرح
$a = 57$	بقسمة كلا الطرفين على 15

8-8 معادلة الدائرة (الصفحات 233–228)

اكتب معادلة الدائرة في كل حالة مما يأتي:

50) المركز $(0, 0)$، $r = \sqrt{5}$

51) المركز $(-4, 8)$، $d = 6$

52) المركز $(-1, 4)$ والمستقيم $x = 1$ مماس لها.

ارسم كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

53) $x^2 + y^2 = 2.25$

54) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$

استعمل المعلومات الآتية في حل التمارين 55 و 56:

دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي وتمر بالنقاط $A(0, 6), B(6, 0), C(6, 6)$.

55) اكتب معادلة الدائرة.

56) ارسم الدائرة.

57) **بيتزا:** يقع محل صنع البيتزا على شبكة الإحداثيات في الموقع $(7, 3)$ وخدمة التوصيل المجاني لهذا المحل تصل إلى 15 ميلاً تقريبًا. اكتب معادلة الدائرة التي تمثل حدود منطقة خدمة التوصيل المجاني للبيتزا.

مثال (8): اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 4)$، وطول نصف قطرها يساوي 3.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$[x - (-1)]^2 + (y - 4)^2 = 3^2$	$h = -1, k = 4, r = 3$
$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$	بالتبسيط

مثال (9):

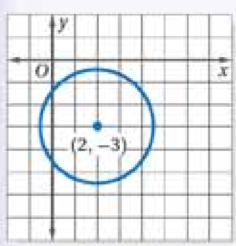
ارسم الدائرة التي معادلتها $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 6.25$. وحدِّد قيم h, k, r بكتابة المعادلة في الصورة القياسية.

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 6.25$$

$$(x - 2)^2 + [y - (-3)]^2 = 2.5^2$$

$$h = 2, k = -3, r = 2.5$$

عيِّن المركز $(2, -3)$، ثم استعمل الفرجار لرسم دائرة طول نصف قطرها يساوي 2.5 وحدة.

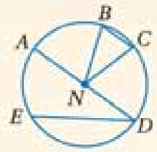


الفصل

8 اختبار الفصل

1) حدد نصف قطر الدائرة التي محيطها يساوي 25π مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

ارجع إلى $\odot N$ لحل التمارين 2–9.



2) سمِّ أنصاف أقطار $\odot N$.

3) إذا كان $AD = 24$ ، فأوجد CN.

4) هل $ED > AD$؟ فسّر إجابتك.

5) إذا كان AN يساوي $5\ \text{m}$، فأوجد القيمة الفعلية لمحيط $\odot N$.

6) إذا كان $m\angle BNC = 20°$ ، فأوجد $m\widehat{BC}$.

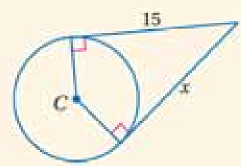
7) إذا كان $\overline{BE} \cong \overline{ED}$ و $m\widehat{ED} = 120°$ ، فأوجد $m\widehat{BAE}$.

8) إذا كان $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}, m\widehat{BC} = 30°$ ، فأوجد $m\widehat{AB}$.

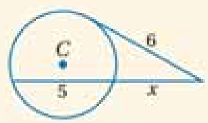
9) إذا كان $m\widehat{AE} = 75°$ ، فأوجد $m\angle ADE$.

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات هي مماسات فعلًا:

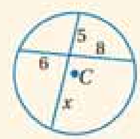
10)



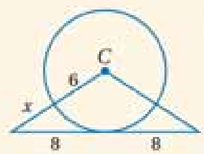
11)



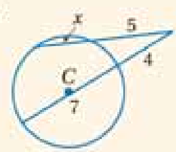
12)



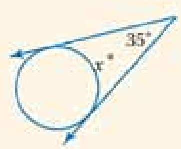
13)



14)

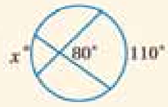


15)



16)

17)



18) **ألعاب:** افترض أن عرض عجلة فيريس يساوي 50 قدمًا، فما المسافة التي يقطعها راكب في دورة واحدة لهذا العجلة تقريبًا.

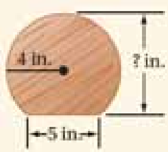
19) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-2, 5)$، وقطرها 50.

20) **زلازل:** عندما يضرب زلزال منطقة ما فإنه يترك أمواجًا زلزالية تنتشر على شكل دوائر متحدة المركز، مركزها هو مركز الزلزال.
افترض أن محطة رصد الزلازل حددت أن مركز زلزال يبعد $63\ \text{mi}$ من المحطة. وإذا كان موقع المحطة هو نقطة الأصل، فاكتب معادلة الدائرة التي تمثل موقعًا محتملًا لمركز الزلزال.

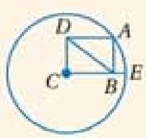
21) ارسم الدائرة التي معادلتها $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$.

22) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.
المعطيات: $\odot X$ فيها $\overline{RS}$ و $\overline{TV}$ قطران
المطلوب: إثبات أن $\widehat{VS} \cong \widehat{RT}$

23) **حرف:** يعمل مازن فواصل للكتب من قطع خشبية دائرية، كما هو موضح في الشكل المجاور. ما ارتفاع القطعة المبتورة؟



24) **اختيار من متعدد:** الدائرة C نصف قطرها r، والشكل $ABCD$ مستطيل. أوجد DB.



A r

B $\frac{\sqrt{2}}{2}r$

C $\sqrt{3}\,r$

D $\frac{\sqrt{3}}{2}r$

25) **إنشاء:** قنطرة تعلو بابًا، ارتفاعها 2ft، وعرضها 7ft. أوجد نصف قطر الدائرة التي تحوي هذه القنطرة.

الفصل

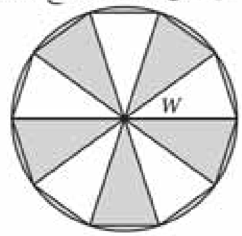
8

اختبار معياري تراكمي

للفصول 8-5

أجب عن كل من الأسئلة الآتية.

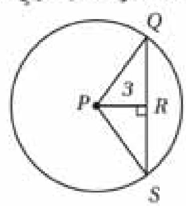
1) رُسم المضلع المنتظم العشاري داخل دائرة، ليكوّن صفحة غلاف للكتاب السنوي لمدرسة. فإذا وصلت الرؤوس المتقابلة بقطع مستقيمة فما قياس $\angle W$؟



A $45°$ **C** $60°$

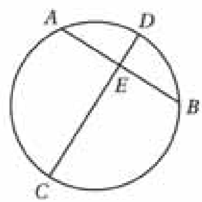
B $50°$ **D** $36°$

2) نصف قطر $\odot P$ يساوي 5 ، $PR = 3$، ما طول $\overline{QS}$ ؟



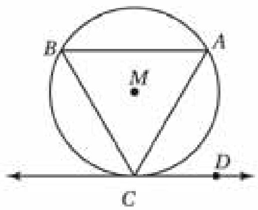
A 4 **B** 5 **C** 8 **D** 10

3) في الدائرة أدناه، يتقاطع الوتران $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ في النقطة E.



إذا كان $AE = 8, DE = 4$ و $EB = 9$ ، فما طول $\overline{EC}$؟

4) في $\odot M$ ، إذا كان $\widehat{AB} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{CA}$.
$\overleftrightarrow{CD}$ مماس للدائرة M عند النقطة C كما في الشكل أدناه.
ما قياس $\angle ACD$ ؟

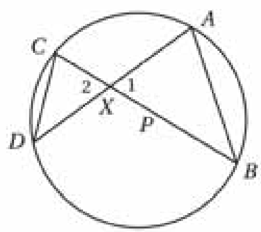


A $30°$ **B** $60°$ **C** $90°$ **D** $120°$

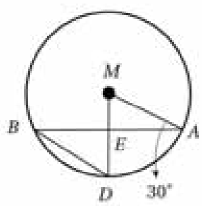
5) اكتب برهانًا ذا عمودين مستعملًا الشكل أدناه.

المعطيات: $\odot P$

المطلوب: إثبات أن $\triangle CXD \sim \triangle AXB$

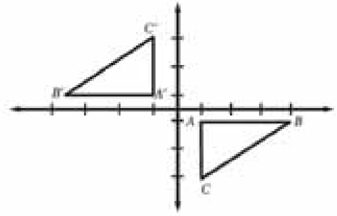


6) في $\odot M$، إذا كان $\overline{BE} \cong \overline{EA}$ ، $m\angle EAM = 30°$ كما في الشكل أدناه، فأوجد $m\angle DBA$؟



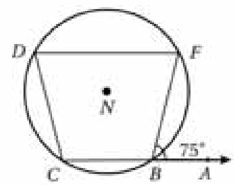
A $15°$ **B** $30°$ **C** $45°$ **D** $60°$

7) في الشكل المجاور .



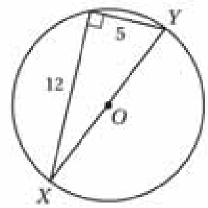
مانوع التحويل الهندسي الذي يحول المثلث ABC إلى $A'B'C'$؟

8) في $\odot N$ ،إذا كان $m\angle FBA = 75°$ ، $\overline{CA} \parallel \overline{DF}$ ، كما في الشكل أدناه، فما قياس $\angle BCD$ ؟



A $75°$ **B** $85°$ **C** $105°$ **D** $115°$

9) إذا كانت $\overline{XY}$ قطرًا في الدائرة O ، فما محيطها؟



A 5π **C** 7.5π

B 7π **D** 13π

10) مربع ومعيّن لهما المحيط نفسه . إذا كان المعيّن ليس مربعًا فإن :

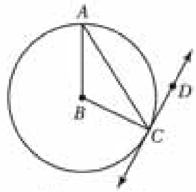
A مساحة المعيّن أكبر من مساحة المربع

B مساحة المربع أكبر من مساحة المعيّن

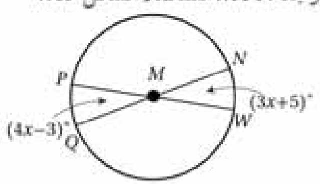
C مساحة المربع تساوي مساحة المعيّن

D لايمكن المقارنة إلا بمعرفة المحيط بالضبط.

11) $\overleftrightarrow{CD}$ مماس للدائرة B عند C، و $\overline{BC}$ نصف قطر في الدائرة. إذا كانت $m\angle ACB = 35°$ فما $m\angle ACD$، مستعملًا الشكل أدناه؟



12) أوجد $m\widehat{PN}$ مستعملًا الشكل أدناه.



A $114°$ **B** $151°$ **C** $97°$ **D** $163°$

سؤال ذو مستوى متقدم

سجل إجابتك على ورقة مبينًا خطوات الحل.

13) القطعة المستقيمة التي نهايتاها $A(1, -2)$ و $B(1, 6)$ تمثل قطر دائرة.

a) حدد بيانيًّا النقطتين A و B ، ثم ارسم الدائرة.

b) ما محيط الدائرة؟

c) ما معادلة الدائرة؟

هل تحتاج إلى مساعدة؟													
إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى	8-4	8-3	8-7	8-6	8-4	8-3	7-3	8-4	8-1	5-5	8-5	8-2	8-8

الصيغ

الهندسة الإحداثية

الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
المسافة	على خط الأعداد: $d = \lvert a - b \rvert$ على المستوى الإحداثي: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ في الفراغ: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ طول القوس: $\ell = \frac{N}{360} \cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف	على خط الأعداد: $M = \frac{a + b}{2}$ على المستوى الإحداثي: $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ في الفراغ: $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

المحيط

المربع	$P = 4s$
المستطيل	$P = 2\ell + 2w$
الدائرة	$C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$

المساحة

المربع	$A = s^2$
المستطيل	$A = bh$ أو $A = \ell w$
متوازي الأضلاع	$A = bh$
شبه المنحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$
المعين	$A = bh$ أو $A = \frac{1}{2}d_1 d_2$
المثلث	$A = \frac{1}{2}bh$
المضلع المنتظم	$A = \frac{1}{2}Pa$
الدائرة	$A = \pi r^2$
القطاع الدائري	$A = \frac{N}{360} \cdot \pi r^2$

نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
الصيغة التربيعية	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

المساحة الجانبية

المنشور	$L = Ph$
الأسطوانة	$L = 2\pi rh$
الهرم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
المخروط	$L = \pi r\ell$

المساحة السطحية

المنشور	$T = Ph + 2B$
الأسطوانة	$T = 2\pi rh + 2\pi r^2$
الهرم	$T = \frac{1}{2}P\ell + B$
المخروط	$T = \pi r\ell + \pi r^2$
الكرة	$T = 4\pi r^2$

الحجم

المكعب	$V = s^3$
متوازي المستقيمات	$V = \ell wh$
المنشور	$V = Bh$
الأسطوانة	$V = \pi r^2 h$
الهرم	$V = \frac{1}{3}Bh$
المخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
الكرة	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

المعادلات في المستوى الإحداثي

معادلة مستقيم بمعرفة الميل والجزء المقطوع	$y = mx + b$
معادلة مستقيم بمعرفة الميل والجزء المقطوع	$y - y_1 = m(x - x_1)$
معادلة الدائرة	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

حساب المثلثات

قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

الرموز

h	الارتفاع
$\angle$	زاوية
$\measuredangle s$	زوايا
a	العامِد
$\approx$	مساوٍ تقريبًا لـ
$\overparen{AB}$	القوس الأصغر الذي طرفاه A و B
$\overparen{ABC}$	القوس الأكبر الذي طرفاه A وَ B
A	مساحة المضلع أو الدائرة
	أو مساحة سطح الكرة
	أو قياس القوس بالدرجات
B	مساحة قاعدة المنشور أو الأسطوانة
	أو الهرم أو المخروط
b	قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع
	أو شبه المنحرف
$p \leftrightarrow q$	عبارة الشرط المزدوج:
	p إذا وفقط إذا q
$\odot P$	دائرة مركزها P
C	محيط الدائرة
$p \rightarrow q$	عبارة الشرط: إذا كان p فإن q
$\cong$	مطابق لـ
$p \wedge q$	p وَ q
cos	جيب التمام
$^{\circ}$	درجة

d	قطر الدائرة، المسافة
$p \vee q$	p أو q
AB	المسافة بين النقطتين A و B
$=$	يساوي
$\neq$	لا يساوي
$>$	أكبر من
$\geq$	أكبر من أو يساوي
A'	صورة عن A
$<$	أقل من
$\leq$	أقل من أو يساوي
L	المساحة الجانبية
$\overleftrightarrow{DE}$	مستقيم يمر بالنقطتين D و E
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	مقدار المتجه من A إلى B
$m\angle A$	قياس الزاوية A بالدرجات
$m\overparen{AB}$	قياس القوس AB بالدرجات
M	نقطة المتصف
$\sim p$	نفي العبارة p
$\sqrt{}$	الجذر التربيعي الموجب
(x, y)	الزوج المرتب
(x, y, z)	الثلاثي المرتب
$\parallel$	موازٍ لـ
$\nparallel$	ليس موازيًا لـ
▱	متوازي أضلاع

P	المحيط
$\perp$	عمودي على
π	باي (ط) النسبة التقريبية
$n\text{-}gon$	مضلع له n من الأضلاع
r	نصف قطر الدائرة
$\overrightarrow{PQ}$	شعاع (نصف مستقيم) يمر بالنقطة
	Q وطرفه P
$\overline{RS}$	قطعة مستقيمة طرفاها S,R
s	جانب من مضلع
$\sim$	مشابه
sin	الجيب
ℓ	المستقيم ℓ، طول المستطيل، طول
	القوس، الارتفاع الجانبي
m	الميل
tan	الظل
T	مساحة السطح الكلية
$\triangle$	المثلث
$\vec{a}$	المتجه a
$\overrightarrow{AB}$	المتجه AB من A إلى B
V	الحجم
w	عرض المستطيل